2. Klausur Leistungskurs Physik Sporenberg
Jahrgsst. Q2/1 Datum: 05.12.2013

Name: ____

1.Aufgabe: Mit einem Schulröntgengerät wird ein Röntgenspektrum erzeugt. Abbildung 1 zeigt ein solches Spektrum, bei dem die Zählrate R in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ der Strahlung aufgetragen ist.
Für die Messung wird er in Abbildung 2 schematisch skizzierte Aufbau benutzt, bei dem eine Röntgenanode aus Molybdän (Z = 42) und ein NaCl-Einkristall (Netzebenenabstand d = 282 pm) verwendet wurde. Die Zählrate R wird mit einem Geiger-Müller-Zählrohr gemessen, die Kollimatoren dienen lediglich der Bündelung des Röntgenstrahls.

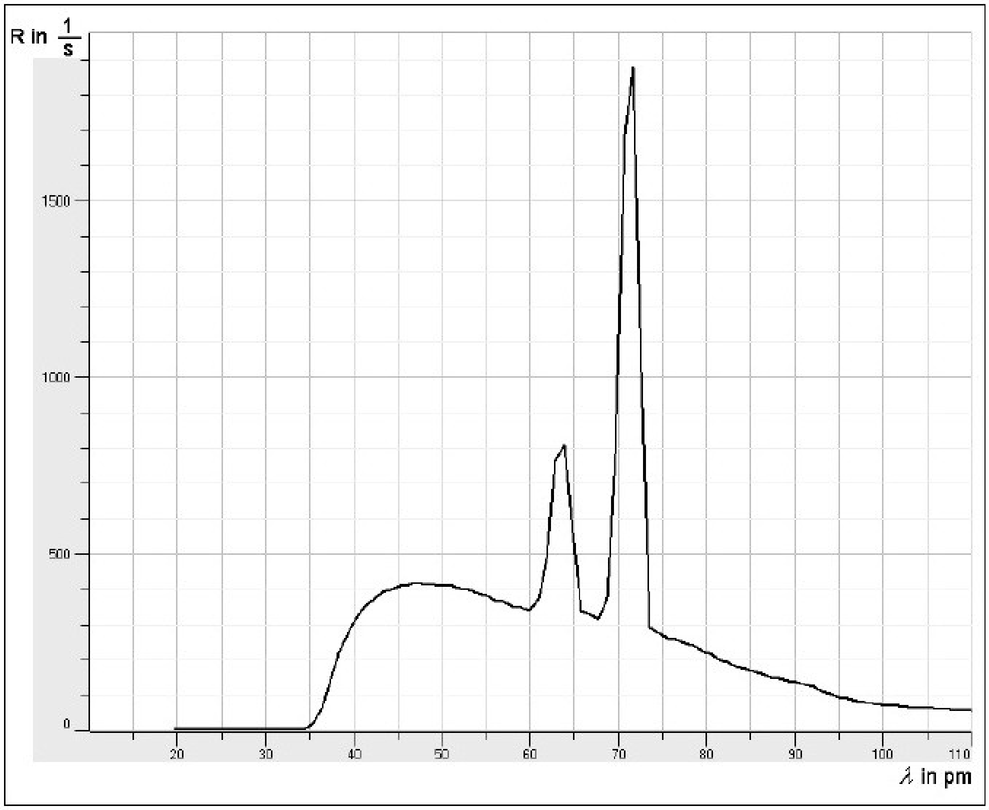


Abbildung 1: Röntgenspektrum

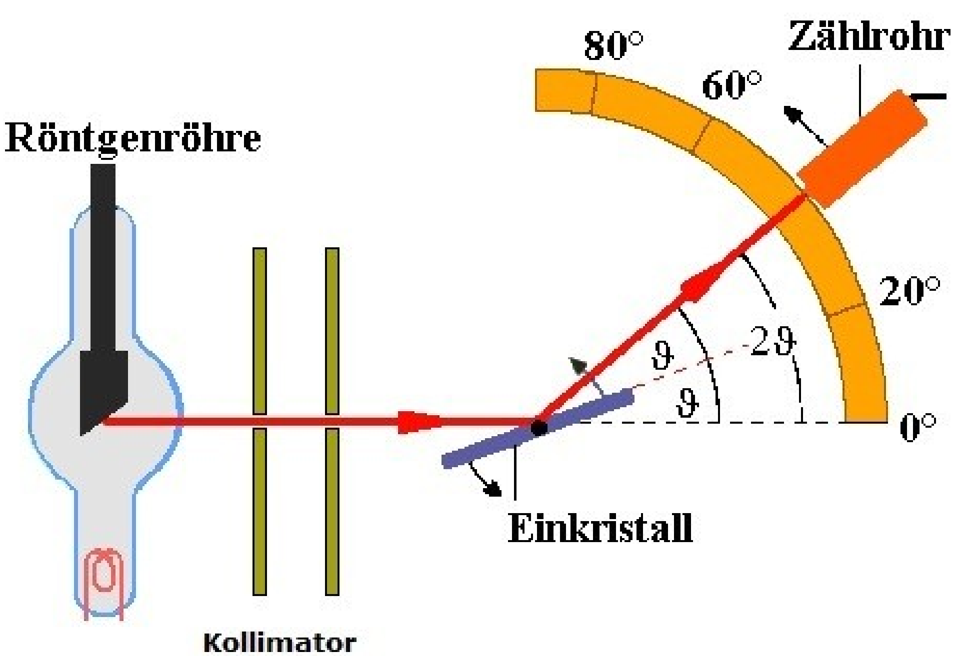


Abbildung 2

Zunächst geht es um den Entstehungsprozess der Röntgenstrahlung

a) Beschreiben Sie den Aufbau der Röntgenröhre und ergänzen Sie die Abbildung 2 durch die elektrische Beschaltung der Röhre (in der Zeichnung auf dem Klausurblatt).
b) Erläutern Sie die Wechselwirkungsprozesse in der Anode, die zur Entstehung der Röntgenstrahlung beitragen.
c) Geben Sie begründet an, welches der beiden ausgeprägten Maxima in Abbildung 1 zur K_{α}- und welches zur K_{β}-Strahlung gehört.

Die Aufnahme des Spektrums erfolgt durch die Drehung des Einkristalls um den Winkel ϑ bei gleichzeitiger Drehung des Zählrohrs um den Winkel $2 \cdot \vartheta$ (siehe Abbildung 2).

d) Erläutern Sie diese Methode, indem Sie auf die Beugung an den Netzebenen des Einkristalls (Bragg-Reflexion) eingehen.
e) Leiten Sie mit einer geeigneten Skizze die Bragg-Beziehung her.

Aus den Wellenlängenangaben der charakteristischen Maxima in Abbildung 1 lassen sich die zugehörigen Strahlenenergien und mit Hilfe der Bragg-Beziehung die Glanzwinkel ϑ ermitteln.

f) Geben Sie die Wellenlängenwerte der beiden Maxima anhand der grafischen Auswertung an und berechnen Sie damit die Strahlungsenergien in der Einheit keV.
f1) Bestimmen Sie diejenigen Glanzwinkel, die zu den beiden Maxima im Wellenlängenspektrum führen, in der 1. bis 3. Ordnung.
g) Begründen Sie, warum die Winkelunterschiede zwischen den Maxima in den verschiedenen Ordnungen nicht konstant sind.

Für drei verschiedene Anodenspannungen in der Röhre nimmt man im kurzwelligen Bereich das in Abbildung 3 dargestellte Spektrum auf. Die Werte der Anodenspannungen sind in dem Diagramm angegeben.

h) Deuten Sie die kurzwellige Grenze des Spektrums im Quantenmodell.
i) Begründen Sie, warum die charakteristischen Maxima stets an derselben Stelle (bei derselben Wellenlänge) entstehen.
k) Ermitteln Sie anhand des Diagramms die Grenzwellenlänge für die drei Anodenspannungen.

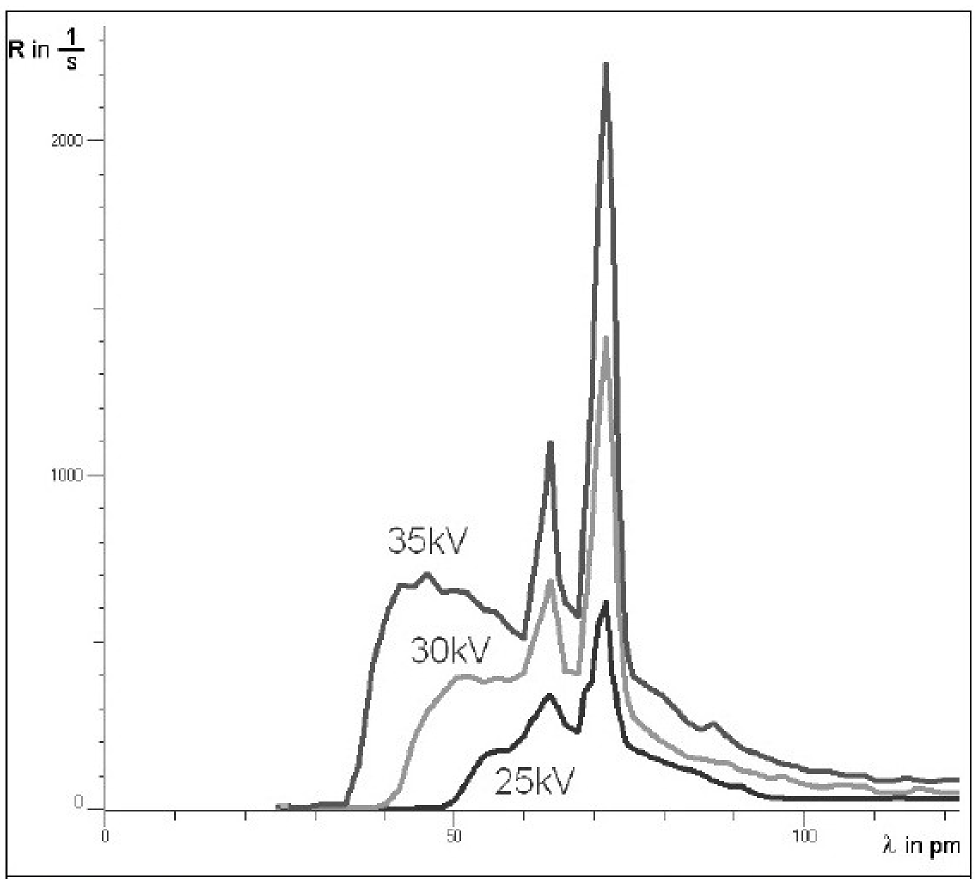


Abbildung 3

l) Bestimmen Sie mit diesen Wellenlängenwerten und den dazugehörigen Anodenspannungen den Wert der Planckschen Konstanten h.

M.G.J. Moseley untersuchte 1913 die charakteristische Röntgenstrahlung von verschiedenen Anodenmaterialien (Kernladungszahl Z). Er stellte dabei unter Einbeziehung des Bohrschen Atommodells folgende Gesetzmäßigkeit auf, die näherungsweise für die Energie ΔE der Strahlungsübergänge zwischen den Niveaus mit den Haupquantenzahlen m und n (m > n) gilt:

$$\Delta E = -13{,}6\ eV \cdot (Z-a)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

m) Wir betrachten zunächst das Wasserstoffatom mit Z = 1 und a = 0, also:

$$\Delta E = -13{,}6\ eV \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

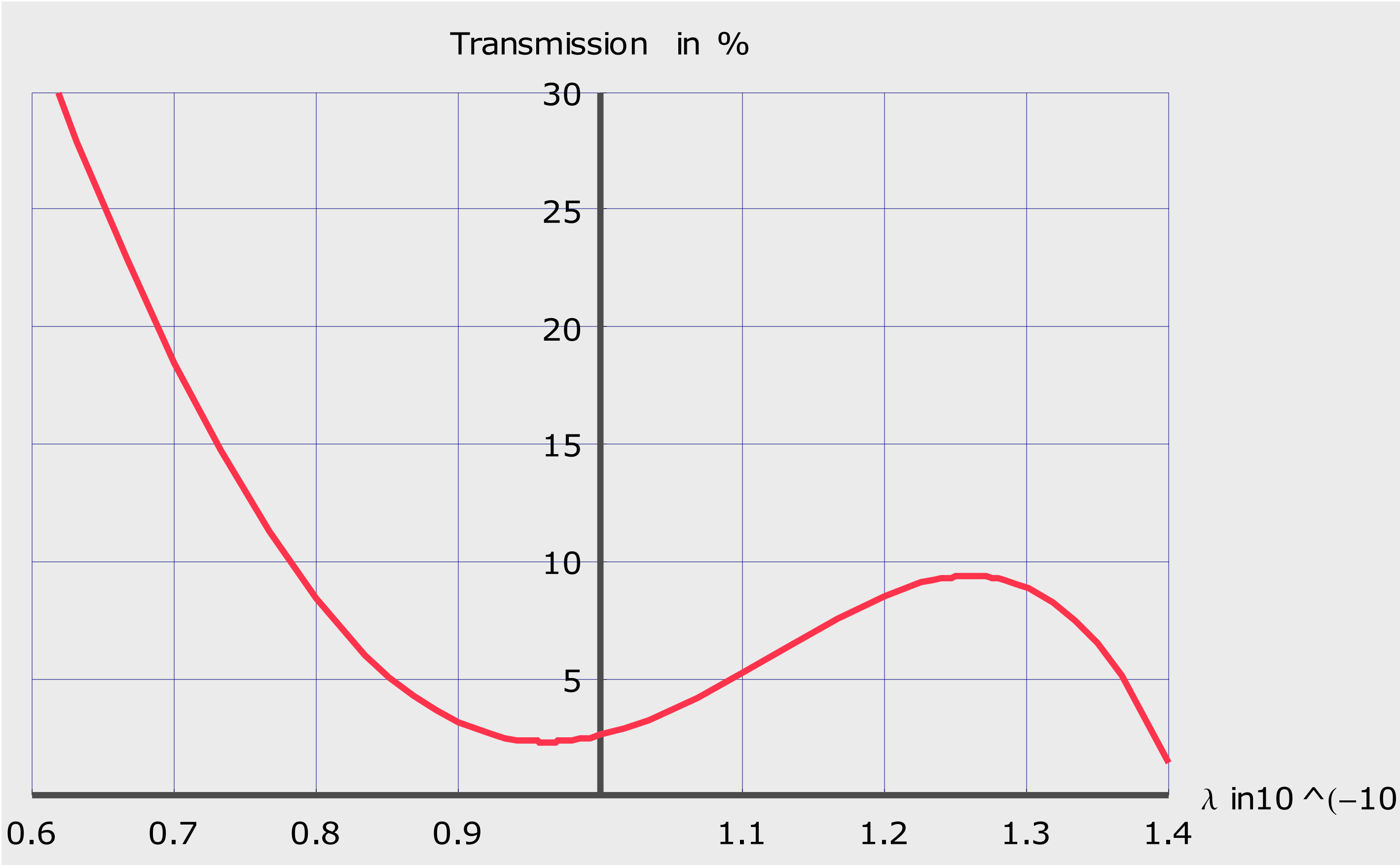
Erläutern Sie die physikalische Bedeutung der Formel.

n) Bei anderen Atomen kann für Übergänge von m = 2 und m = 3 nach n = 1 in guter Näherung a = 1 gesetzt werden.
Bestimmen Sie mit dieser Voraussetzung die Energie der K_α- und K_β-Strahlung von Molybdän und ermitteln Sie die prozentuale Abweichung von den ermittelten Werten aus Teilaufgabe f).
Interpretieren Sie, warum für Mehrelektronenatome die Einführung der Konstanten a>0 sinnvoll ist, insbesondere a = 1 für den Übergang nach n = 1.

2.Aufgabe: **I.**

a) Erläutern Sie den COMPTON-Effekt. Fertigen Sie eine Skizze an und geben Sie das Ergebnis an (Wellenlängenänderung). Welche Bedeutung hat die Comptonwellenlänge? Berechnen Sie deren Wert.
Kann es COMPTON-Effekt auch bei Licht geben?
b) Zur Durchführung einer Messreihe für den COMPTON-Effekt gibt es verschiedene Anordnungen. Erläutern Sie den Aufbau nach Pohl und geben Sie an, wie er durchgeführt wird. Erläutern Sie auch, welche Fehlermöglichkeiten es gibt.
c) Werten Sie den Versuch mit folgenden gemessenen Werten aus. Benutzen Sie dabei die angegebene Transmissionskurve.

N_0 = 9312 Impulse/Minute N_1 = 1272 Impulse/Minute (Absorber vor dem Streukörper)
N_2 = 1056 Impulse/Minute (Absorber nach dem Streukörper)
Interpretieren Sie die Ergebnisse.



II.

Die Primärstrahlung für den COMPTON-Effekt soll auf folgende Weise hergestellt werden: Elektronen werden mit der Spannung U = 500 kV beschleunigt; sie prallen danach auf einen Metallblock. Wenn die gesamte kinetische Energie eines dieser Elektronen dabei in Strahlungsenergie umgesetzt wird, so wird ein RÖNTGEN-Quant mit der Grenzfrequenz f_{gr} emittiert. Diese RÖNTGEN-Strahlung ist die gewünschte Primärstrahlung.

Die Primärstrahlung der Frequenz f_{gr} fällt auf ein Material, an dem COMPTON-Streuung eintritt. Die Streuung wird unter dem Winkel $\varphi = 85^o$ beobachtet.

a) Berechnen Sie die Wellenlänge λ(primär) der Primärstrahlung!
b) Berechnen Sie die Wellenlänge λ(streu) der Streustrahlung!
c) Der COMPTON-Effekt kann als elastischer Stoß eines RÖNTGEN-Quants der Primärstrahlung mit einem (nahezu) freien Elektron des bestrahlten Materials aufgefasst werden. Das gestoßene Elektron hat vor dem Stoß keine kinetische Energie. Bestimmen Sie die Änderungen von Energie, Frequenz und Wellenlänge des Photons sowie die kinetische Energie, den Impuls und die Richtung des Rückstoßelektrons mit den Werten von U= 550 kV und $\varphi = 85^o$.

d) Zeigen Sie mit Hilfe des Energie- und Impulserhaltungssatzes, dass beim Compton-Stoß das freie Elektron nicht die gesamte Photonenenergie aufnehmen kann. Berechnen Sie dazu relativistisch (v/c) nach dem Stoß!
Ansatz: Führen Sie den Beweis dadurch, dass Sie den Impuls- und Energiesatz für den Fall angeben, dass das Elektron die gesamte Energie aufnimmt.

III.

Das Natriumisotop ^{22}Na ist überwiegend ein β^+ - Strahler, nur zu etwa 9% tritt Umwandlung unter Elektroneneinfang auf. Beim β^+ - Zerfall ist die maximale Energie der emittierten Positronen W_{max} = 0,55 MeV, außerdem tritt dabei eine γ-Strahlung der Energie W = 1,28 MeV auf.

a) Erstellen Sie für die beiden Möglichkeiten des Zerfalls die vollständige Reaktionsgleichung.

b) In beiden Fällen tritt ein bisher im Text nicht erwähntes Teilchen auf.

Erläutern Sie kurz, welcher Erhaltungssatz beim β^+ - Zerfall das Auftreten dieses Teilchens fordert.

c) Wie lässt sich experimentell nachweisen, dass neben β^+ - Zerfall auch Elektroneneinfang auftritt. Kurze Begründung!

d) Zeigen Sie allgemein, dass beim K-Einfang stets eine um 1,02 MeV höhere Energie frei wird als beim β^+ - Zerfall. Warum überwiegt bei leichten Nukliden dennoch β^+ - Zerfall?

Lösung:

1.Aufgabe:

a)Die Vakuum-Röntgenröhre besteht aus einer abgeschrägten Anode (unterschiedlichen Materials) und einer beheizbaren Kathode K. Eine Heizspannung versorgt die Kathode, wodurch diese Elektronen emittiert. Zwischen Anode und Kathode wird eine hohe Spannung gelegt, wodurch die Elektronen zur Anode beschleunigt werden.

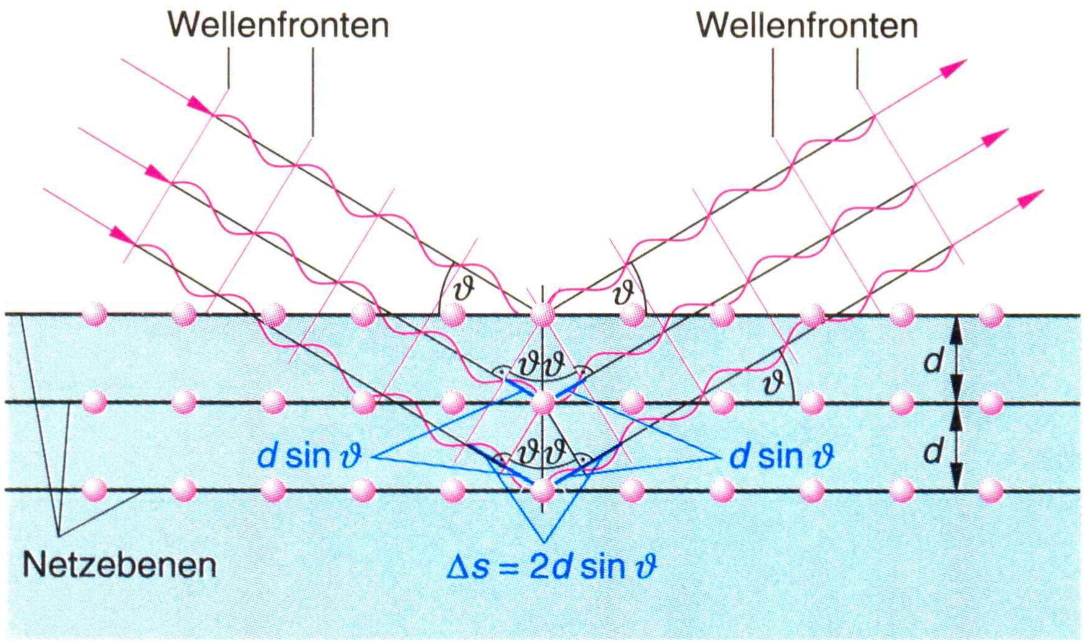
b)Die bescheunigten Elektronen dringen in die Anode ein und verursachen im Anodenmaterial verschiedene Prozesse.

1. Die Elektronen werden im elektrischen Feld der Atomhülle und des Atomkerns mehr oder weniger abgebremst und geben unterschiedliche Strahlungsenergien ab; dadurch entsteht ein Kontinuum von Wellenlängen von einer kürzesten Wellenlänge hin zu immer längeren (Bremsspektrum)

2.Charakteristische Strahlung: Die einlaufenden Elektronen schlagen Elektronen (vorwiegend) aus der K-Schale heraus. Die Lücke wird aufgefüllt durch Übergänge aus den höheren Schalen. Dadurch entstehen (charakteristische) Strahlungsenergien, die vom atomaren Aufbau der Anode abhängen. Die zugehörigen Wellenlängen werden im Spektrum registriert.

c)Das linke ausgeprägte Maximum im Spektrum entspricht der K_β-Strahlung, das rechte der K_α-Strahlung. Das linke Maximum hat die kürzere Wellenlänge, damit die höhere Strahlungsenergie. Diese gehört zum Übergang mit der größeren Energiedifferenz (hier von der M- zur K-Schale).

d)Der gebündelte Röntgenstrahl fällt unter dem sog. Glanzwinkel ϑ auf die Kristalloberfläche (parallel zur Netzebene). Kristall und Zählrohr werden so gedreht, dass die Bragg-Bedingung erfüllt ist (Glanzwinkel der einfallenden und der reflektierten Strahlung gleich groß). Damit muss sich das Zählrohr im doppelten Glanzwinkel drehen. Das Zählrohr registriert die Zählrate der reflektierten Strahlung beim Durchfahren des vorgesehenen Winkelbereichs.



e)Einfallende Röntgenstrahlen werden als Wellen gedeutet, die an den Atomen des Einkristalls gestreut (reflektiert) werden. Es ergibt sich bei Reflexion an benachbarten Netzebenenatomen ein Gangunterschied von 2 x, damit entstehen Interferenzmaxima für $n\ \lambda = 2\ x$, wobei n die Ordnung beschreibt (n = 1, 2, ..). mit $x = d \sin \vartheta$.

f)Man liest die Wellenlängenwerte $\lambda_{K\alpha} = 63{,}6$ pm und $\lambda_{K\beta} = 71{,}5$ pm ab. Nach $E = h\ f = h\ c/\lambda$ ergeben sich die Strahlungsenergien $E_{K\beta} = 19{,}6$ keV und $E_{K\alpha} = 17{,}5$ keV.

f1)Aus der Bragg-Beziehung ergibt sich: $\vartheta = arc \sin \left(\frac{n\ \lambda}{2\ d} \right)$

Damit erhält man für n = 1: $\vartheta_{K\beta} = 6{,}4°$, $\vartheta_{K\alpha} = 7{,}3°$ für n = 2: $\vartheta_{K\beta} = 13{,}0°$, $\vartheta_{K\alpha} = 14{,}6°$ und für n = 3: $\vartheta_{K\beta} = 19{,}7°$, $\vartheta_{K\alpha} = 22{,}3°$

g)Winkel und Wellenlänge sind wegen der Bragg-Beziehung (Sinus-Funktion) nicht proportional, deswegen können die Winkelunterschiede nicht konstant sein.

h)Das Elektron wird beim Eintritt in die Anode so abgebremst, dass es seine komplette kinetische Energie abgibt und in die Photonenenergie h f umwandelt; dadurch entsteht eine höchste Frequenz und kürzeste Wellenlänge (kurzwellige Grenze des Spektrums).

i)Da die charakteristischen Maxima von Übergängen im Anoden-Material abhängen, sind sie unabhängig von der Anodenspannung und somit von der maximalen Energie der einlaufenden Elektronen; lediglich die Energie für die Stoßanregung bzw. Ionisierung aus den jeweiligen Schalen muss aufgebracht werden.

k)Im Diagramm liest man die λ-Werte (Grenzwellenlängen) als Berührstellen der Kurven oder als Schnittstellen der Ausgleichsgeraden an die Kurven mit der λ-Achse ab. Folgende Werte ergeben sich durch Auswertung mit der Ausgleichsgeraden:

$\lambda_G = 48{,}7$ pm, 25 kV, $\lambda_G = 40{,}3$ pm, 30 kV und $\lambda_G = 34{,}6$ pm, 35 kV l)Aus $h\,f = E\,U \Leftrightarrow h = \dfrac{e\,U\,\lambda_G}{c}$ lässt sich für die drei Spannungen und zugehörigen Grenzwellenlängen die Plancksche Konstante bestimmen:

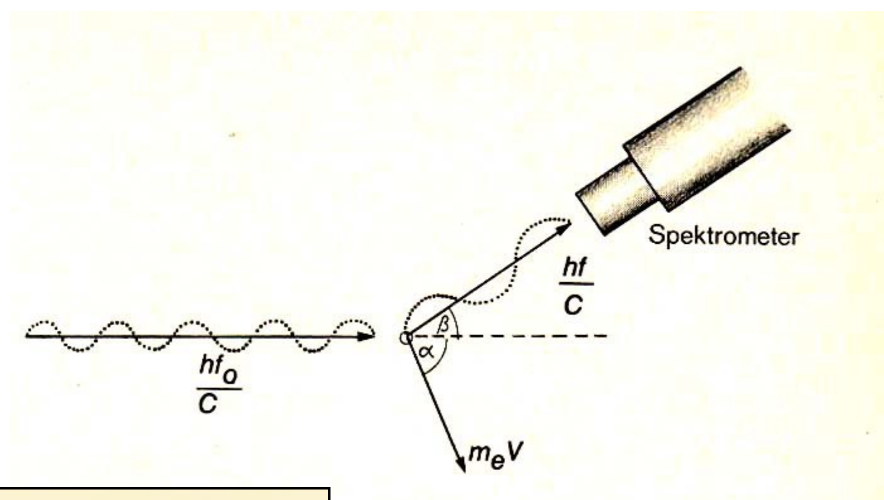
h= $6{,}47 \cdot 10^{-34}$ Js.

m)Die erste Formel gibt an, welche Energiedifferenz in Form von Strahlungsenergie von dem Wasserstoff-Atom emittiert wird, wenn das Elektron von einem angeregten Zustand mit der Energie Em in einen weniger angeregten Zustand oder den Grundzustand mit der Energie En übergeht (wobei n, m $\in$ N, m > n die Hauptquantenzahlen sind).

n)Energie der $K\alpha$-Strahlung: für n = 1, m = 2 und Z = 42 ergibt sich 17,15 keV, prozentuale Abweichung vom experimentellen Wert ca. 2%. Energie der K_β-Strahlung: für n = 1, m = 3 und Z = 42 ergibt sich 20,32 keV, prozentuale Abweichung vom experimentellen Wert ca. 3,5 %.
Bei Mehrelektronensystemen sind weitere Elektronen in den inneren Schalen vorhanden, sodass das „herabfallende" Elektron nicht von der gesamten Kernladung Z beeinflusst wird (Reduktion um a); auf der K-Schale befinden sich zwei Elektronen. Ist ein Elektron befreit, wirkt auf das „herabfallende" Elektron bei der Coulomb-Anziehung eine Kernladung weniger (Reduktion von Z um 1).

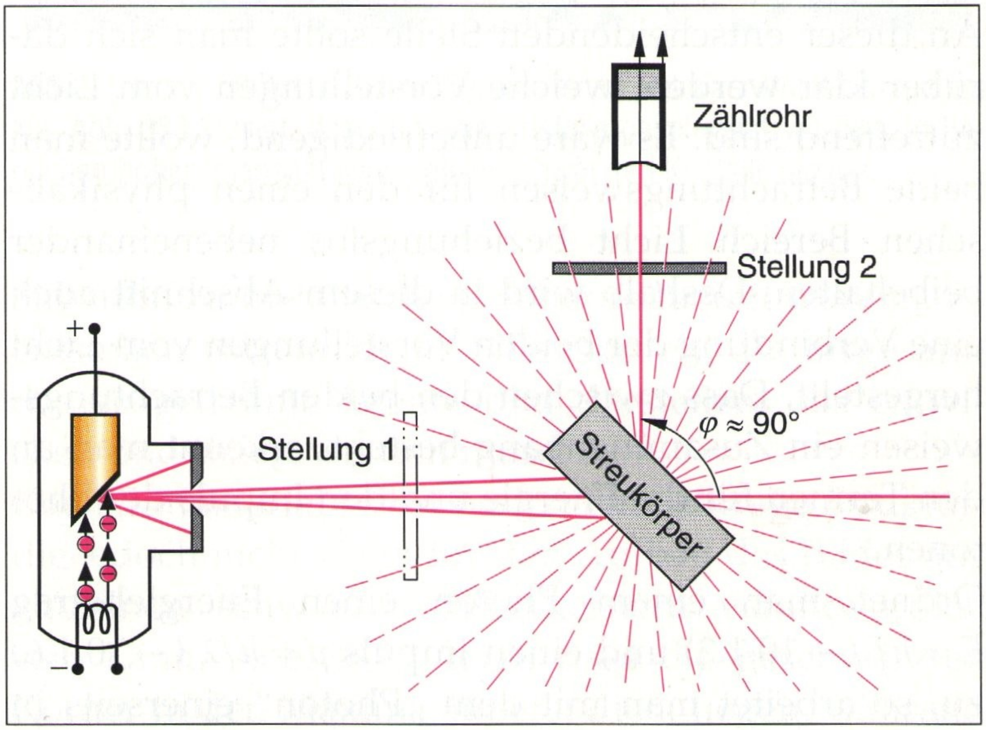
2.Aufgabe: **I.**

Stößt ein Photon gegen ein praktisch ruhend gedachtes, quasi freies Elektron, so beobachtet man, dass die Wellenlänge des abgelenkten Photons größer als die Wellenlänge des ursprünglichen Photons ist.



$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\beta)$$
$$= \lambda_c(1 - \cos\beta)$$
mit der Comptonwellenlänge $\lambda_c = \dfrac{h}{m_0 c} = 2{,}424$ pm

Die Bestimmung der Wellenlänge der gestreuten Röntgenstrahlung geht auf eine von R.W. Pohl angegebene Anordnung zurück. Es wird dabei ausgenutzt, dass die Transmission TC einer Kupferfolie von der Wellenlänge der Röntgenstrahlung abhängig ist. Aus zwei Messun-gen, bei denen sich die Kupferfolie einmal zwischen Röntgenquelle und Streukörper und einmal zwischen Streukörper und Zählrohr befindet, kann die Verschie-bung der Wellenlänge ermittelt werden.



381.2 Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus zum Compton-Effekt. Die gestreute Strahlung wird stärker absorbiert, wenn sich der Absorber in Stellung 2 befindet.

$$I_1 = \frac{1272}{9312} \approx = 0{,}136 \quad und \quad I_2 = \frac{1056}{9312} \approx = 0{,}113$$

Die hier angegebenen können in Wirklichkeit nicht so genau abgelesen werden
Man erhält: $I_1 = 0{,}136 \Rightarrow \lambda_1 = 7{,}43399 \cdot 10^{-11}$ m
$I_2 = 0{,}113 \Rightarrow \lambda_2 = 7{,}664 \cdot 10^{-11}$ m

Bildet man jetzt die Differenz der Wellenlängen, so erhält man:
$\boldsymbol{\lambda_2 - \lambda_1 = 2{,}3001 \cdot 10^{-12}}$ **m**

II.

a)Die Elektronen erhalten die kinetische Enerie $e \cdot U$. Diese Energie wird vollständig in Strahlungsenergie umgesetzt. Daher gilt:

$h\, f_G = e\, U$
Für die Wellenlänge der Primärstrahlung erhält man:

$$\lambda_P = \frac{c}{f_G} = \frac{h\,c}{e\,U} = 2{,}49 \cdot 10^{-12}\ m$$

b)Für den Compton-Effekt gilt:

$$\lambda - \lambda_o = \Delta\lambda = \frac{h}{m_o\, c}(1 - \cos\beta)$$

Damit ergibt sich für die Wellenlänge der Streustrahlung:

$$\lambda_S = \lambda_P + \frac{h}{m_e\, c}\left(1 - \cos\vartheta\right) = 4{,}70 \cdot 10^{-12}\ m$$

c)Für die Frequenz gilt: $f = \frac{c}{\lambda}$. Damit erhält man für:

$f_P = 1{,}20398 \cdot 10^{20}$ Hz und $f_S = 6{,}37855 \cdot 10^{19}$ Hz.

Damit ergibt sich: $W_{ÄnderungPhoton} = h\,(f_P - f_S) = 3{,}74877 \cdot 10^{-14}$ J
Frequenzänderung: $\Delta f = 5{,}66125 \cdot 10^{19}$ Hz
Wellenlängenänderung: $\Delta\lambda = 2{,}21 \cdot 10^{-12}$ m

Die Energieänderung des Röntgenquants ist gleich der kinetischen Energie des Elektrons:
$W_{kinElektron} = 3{,}74877 \cdot 10^{-14}$ J

Der Elektronenimpuls lässt sich mit Hilfe des Cosinussatzes berechnen. Es gilt:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos\alpha$

mit b = 1,411,01*10^{-22}, c = 2,47836*10^{-22} und dem Winkel $\alpha = 85°$.

Es ergibt sich für $a = p_{Elektron} = 2{,}74293 \cdot 10^{-22}$ Ns.

Für den Winkel, den die Richtung des Elektrons mit der Richtung des einfallenden Röntgenquants bilden, ergibt sich (mit Hilfe des Cosinussatzes):

$\alpha = 30{,}82°$.

d)Unter der Voraussetzung, dass das frei Elektron Energie und Impuls des Photons vollständig übernimmt, gilt:

1.Energieerhaltungssatz: $$h\, f_{Photon} = c^2 \left(\frac{m_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_e \right) \quad (1)$$

2.Impulserhaltungssatz: $$\frac{h\, f_{Photon}}{c} = \frac{m_e}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot v \quad (2)$$

Dividiert man die Gleichung (1) durch c, so kann man anschließend die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleichsetzen:

$$c\left(\frac{m_e}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-m_e\right)=\frac{m_e}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\cdot v\Rightarrow$$

$$\frac{v}{c}=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\Rightarrow$$

$$\frac{v}{c}=1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\Rightarrow$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=1-\frac{v}{c}\Rightarrow$$

$$1-\left(\frac{v}{c}\right)^2=1-2\cdot\frac{v}{c}+\left(\frac{v}{c}\right)^2\Rightarrow\frac{v}{c}=\left(\frac{v}{c}\right)^2\Rightarrow v=0\ oder\ v=c$$

Keine dieser Fälle ist möglich.

III.

a)

$$\beta^+:\ {}^{22}_{11}\mathrm{Na}\rightarrow{}^{22}_{10}\mathrm{Ne}+{}^{0}_{+1}\mathrm{e}+\nu+\gamma$$

$$\text{K-Einfang}:\ {}^{22}_{11}\mathrm{Na}+{}^{0}_{-1}\mathrm{e}\rightarrow{}^{22}_{10}\mathrm{Ne}+\nu+\gamma$$

b)Wegen der beobachteten kontinuierlichen Energieverteilung ist ein Neutrino nötig.

c) Beim K-Einfang entsteht charakteristische Röntgenstrahlung, weil die Lücke in der K-Schale aufgefüllt wird.

d) β^+-Zerfall: eine Elektronenmasse entsteht
K-Einfang: eine Elektronenmasse verschwindet
Deshalb bei gleichem Ausgangs- und Endkern ist die Differenz:
$2\cdot m_e$ entspricht 1,02 MeV.
Bei leichten Kernen: Für Elektronen in Kernnähe geringere Aufenthaltswahrscheinlichkeit oder Elektronen-Bahn größer oder Kernvolumen kleiner – damit K-Einfang benachteiligt