Aufgaben zur Heisenbergschen Unschärferelation – LK Physik Sporenberg
ausgegeben am 19.09.2013

1.Aufgabe: a) Die Orte eines Elektrons, eines Protons, eines Staubkorns (1mg), eines Kügelchens (1 g) und des Mondes seien auf Δx = 1 mm genau bestimmt. Mit welcher Unschärfe ist dann die Angabe ihrer Geschwindigkeit mindestens behaftet?
b) Die Geschwindigkeit dieser Körper sei bis auf Δv = 1mm/s genau gemessen. Wie groß ist dann die Unschärfe der Ortsmessung?

Lösung:

a)
Elektron: Δv_x = 0,727 m/s
Proton: Δv_x = 0,0004 m/s
Staubkorn: $\Delta v_x = 6{,}626 * 10^{-25}$ m/s
Kügelchen: $\Delta v_x = 6{,}626 * 10^{-28}$ m/s
Mond: $\Delta v_x = 9{,}14 * 10^{-54}$ m/s

b)
Elektron: Δx = 0,727 m
Proton: Δx = 0,0004 m
Staubkorn: $\Delta x = 6{,}626 * 10^{-25}$ m
Kügelchen: $\Delta x = 6{,}626 * 10^{-28}$ m
Mond: $\Delta x = 9{,}14 * 10^{-54}$ m

Ergebnis: Für das Staubkorn und kompakte Körper bedeutet die Orts-Impuls-Unbestimmtheitsrelation keine Einschränkung der Messmöglichkeit der betreffenden Größe. Bei atomaren Dimensionen wird der Messung einer Größe durch ihre Unschärfe eine Grenze gesetzt.

2.Aufgabe: a) Die Messung des Ortes eines Protons ergibt $x = (9{,}16551 \pm 0.00016)\cdot 10^{-2}$ m. Wie groß ist Δp_x mindestens?
b) Die Messung der Geschwindigkeit eines Elektrons ergibt $v_x = (2{,}26 \pm 0{,}10)\cdot 10^{2}$ m/s. Wie groß ist Δx mindestens?

Lösung:

$$\overline{\Delta x}\cdot\overline{\Delta p_x} \ge h \Leftrightarrow m\,\overline{\Delta x}\cdot\overline{\Delta v_x} \ge h$$

a) $$\overline{\Delta p_x} \ge \frac{h}{\overline{\Delta x}} = 4{,}2\cdot 10^{-28}\ \frac{kg\ m}{s}$$

b) $$\overline{\Delta x} \ge \frac{h}{m\ \overline{\Delta v_x}} = 7{,}3\cdot 10^{-5}\ m$$

3.Aufgabe: Berechnen Sie den Bruchteil der Impulsunschärfe vom Impuls (relative Impulsunschärfe Δp_x / p_x) für ein
— Elektron, das von einer Spannung 1000 V beschleunigt wurde und die Ortsunsicherheit Δx = 100 pm besitzt und für ein
— Teilchen von 10 g Masse, der Geschwindigkeit 0,1 m/s und der Ortsunsicherheit

$\Delta x = 10^{-6}$ m.

Lösung:

Elektron:

$$p_x = m\,v_x = m_e\sqrt{2\frac{e}{m_e}U_a} = \sqrt{2\,e\,m_e U_a} = 1{,}71\cdot 10^{-23}\,\frac{kg\ m}{s}$$

$$\overline{\Delta p_x} \approx \frac{h}{\Delta x} = 6{,}626\cdot 10^{-24}\,\frac{kg\ m}{s};\ \frac{\overline{\Delta p_x}}{p_x} = 0{,}39$$

Teilchen: $p_x = m\,v_x = 10^{-3}\,\frac{kg\ m}{s};\ \overline{\Delta p_x} = 6{,}626\cdot 10^{-28}\,\frac{kg\ m}{s};\ \frac{\overline{\Delta p_x}}{p_x} = 6{,}626\cdot 10^{-25}$

4.Aufgabe: Ein Elektron der n-ten Bohrschen Bahn hat

— den Bahnradius $r_n = 5{,}29\cdot 10^{-11}$ m $\cdot\ n^2$

— die Umlaufdauer $T_n = 1{,}52\cdot 10^{-16}$ s $\cdot\ n^3$

a) Errechnen Sie die Geschwindigkeit v_n des Elektrons auf der 1., 2. und 3. Bohrschen Bahn.

b) Die größtmögliche Unsicherheit der Ortsangabe des Elektrons ist der doppelte Radius $\Delta x = 2r$. Wie groß ist die Geschwindigkeitsunschärfe Δv?

c) Errechnen Sie die Werte von Δv_n für die drei Bahnen.

d) Vergleichen Sie die Werte von Δv_n mit denen von v_n. Was bedeutet dies für die Vorstellung vom Atom, bei der die Elektronen um den Atomkern kreisen?

Lösung:

a) $$v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}\cdot\frac{1}{n}$$

Damit ergibt sich: $v_1 = 2{,}19\cdot 10^6$ m/s, $v_2 = 1{,}10\cdot 10^6$ m/s $v_3 = 7{,}3\cdot 10^5$ m/s

b) $\Delta v_x = 3{,}64\cdot 10^{-4}$ m²/s * $1/r_n$

c) $\Delta v_1 = 6{,}88\cdot 10^6$ m/s $\Delta v_2 = 1{,}72\cdot 10^6$ m/s $\Delta v_3 = 7{,}64\cdot 10^5$ m/s

d)Die Unschärfen der Bahngeschwindigkeit sind mindestens so groß wie die Geschwindigkeiten selber. Da die Messunsicherheit sich nicht unter die Unschärfen herunterdrücken lässt, sind solche Geschwindigkeiten wertlos. Es hat also keinen Sinn, von der Bahngeschwindigkeit (und der Umlaufdauer) des Elektrons im Atom zu sprechen.

5.Aufgabe: Bei der Radio- und Fernsehübertragung bedeutet Δf die Frequenzunschärfe der übertragenen Signale und Δt die Zeitdauer für die Aussendung eines Signals.

a) Für eine mittlere Tonqualität genügt eine Signalfrequenz von etwa 10^4 Hz. Wie groß ist die Frequenzunschärfe der ausgesandten Wellenzüge mindestens?

b) Dies entspricht etwa der doppelten übertragbaren Höchstfrequenz eines Tones. Wie groß muss dann der Abstand der Trägerfrequenz zweier benachbarter Sender mindestens sein? Vergleichen Sie dies mit dem Mindestabstand zweier Mittelwellensender von 9 kHz.

c) Beim Fernsehen werden bis zu $5\cdot 10^5$ Signale je Sekunde übertragen. Wie groß ist die Frequenzunschärfe Δf? Welcher Bandbreite entspricht dies? Wie groß muss die Trägerfrequenz mindestens sein, wenn der Abstand benachbarter Sender 100 MHz betragen soll?

Lösung:

a) $\overline{\Delta f}\ \overline{\Delta t} \geq 1$

Zur Welle der Frequenz f gehört die Schwingungsdauer t = 1/f des Senders. Solange muss das Signal mindestens ausgesandt werden, um einen Wellenzug der Frequenz f zu ergeben: $\overline{\Delta t} = \frac{1}{f}$.

Dann beträgt die Unschärfe der Frequenz $\overline{\Delta f} = \frac{1}{\overline{\Delta t}} = 10^4\ Hz$

b) $f_2 - f_1 = 2\ \Delta f_{max} \approx\ 10^4$ Hz ≈ 9 kHz. Dies entspricht dem Mindestfrequenzabstand zweier benachbarter Mittelwellensender

c) $\overline{\Delta f} > \frac{1}{\overline{\Delta t}} = 5 \cdot 10^6\ Hz$ Bandbreite: $2\ \Delta f_{max}$ = 10 MHz

$f_2 - f_1 > 10 \cdot 2 \cdot \Delta f_{max}$ = 100 MHz. Dies entspricht der Wellenlänge: $\lambda_{\min} = \frac{c}{f_2 - f_1} \approx 3\ m$

6.Aufgabe: Man verwendet Licht der mittleren Wellenlänge 600 nm (blau).
a) Formen Sie die Unbestimmtheitsrelation $\Delta W\ \Delta t \approx h$ so um, dass anstelle von ΔW die Frequenzunschärfe Δf der Spektrallinie erscheint.
b) Wie groß ist Δf für die angegebene Linie, wenn für die Lichtquelle $\Delta t \approx 10^{-8}$ s ist? Berechnen Sie die relative Unschärfe Δf /f der Linie.
c) Errechnen Sie die Unschärfe Δλ.

Lösung:

a) $\overline{\Delta W} \cdot \overline{\Delta t} \approx h \quad \Leftrightarrow h \cdot \overline{\Delta f} \cdot \overline{\Delta t} \approx h \Leftrightarrow \overline{\Delta f}\ \overline{\Delta t} \approx 1\ (gilt\ \ für\ \ alle\ \ Wellen)$

b) $\overline{\Delta f} = \frac{1}{\overline{\Delta t}} = 10^8\ Hz;\ \ \frac{\overline{\Delta f}}{f} = \frac{\Delta f\ \lambda}{c} = 2 \cdot 10^{-7}$

c)Es gilt: $\frac{\overline{\Delta f}}{f} = \frac{\overline{\Delta \lambda}}{\lambda};\ \ \overline{\Delta \lambda} = \frac{\overline{\Delta f}}{f}\ \lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-13}\ \ m$

7.Aufgabe: Die Komponenten der gelben Doppellinie im Quecksilberspektrum haben die Wellenlängen 579,1 nm und 577,0 nm.
a) Um zwei Spektrallinien getrennt zu beobachten, muss der Wellenlängenabstand ihrer Achsen größer als die Linienbreite sein. Was folgt damit aus der Tatsache, dass die beiden gelben Linien während des Einbrennvorgangs der Lampe miteinander verschmelzen?
b) Wie groß ist jetzt die Impulsunschärfe Δp_x der zugehörigen Photonen mindestens?
c) Die mittlere Kohärenzlänge eines Wellenzuges und damit die Ortsunschärfe Δ x eines Quants im Wellenzug beträgt Δλ = 2 nm etwa $2 \cdot 10^{-5}$ m. Überprüfen Sie mit diesen Werten die Orts-Impuls-Unschärferelation.

Lösung:

a)Für die Linienbreite $\overline{\Delta\lambda}$ gilt dann: $\overline{\Delta\lambda} < \Delta\lambda = (579{,}1 - 577)\ nm \approx 2\ nm$. Das bedeutet, dass die Linienbreiten diesen Wert während des Einbrennens überschreiten.

b) $\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{h}{\lambda_2} - \frac{h}{\lambda_1} = h\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1\ \lambda_2} = 3{,}97 \cdot 10^{-30}\ \frac{kg\ m}{s}$

c) $\overline{\Delta x} \cdot \overline{\Delta p} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 3{,}97 \cdot 10^{-30}\ \frac{kg\ m^2}{s} = 7{,}94 \cdot 10^{-35}\ Js$. Das stimmt bis auf eine Größenordnung mit dem Wert von h überein.

8.Aufgabe: a) In einer Fernsehröhre werden die glühelektrisch erzeugten Elektronen durch die Spannung U_a = 18,2 kV beschleunigt. Welche Endgeschwindigkeit haben sie beim Durchfliegen der Anodenöffnung?
Trotz dieser hohen Geschwindigkeit soll die folgende Abschätzung ohne Anwendung der Relativitätstheorie erfolgen.
b) Welchen Impuls p haben die Elektronen beim Durchtritt durch die Anodenöffnung?
Wie groß ist die Wellenlänge der zugehörigen DE BROGLIE-Welle?
c) Die Anodenöffnung hat den Durchmesser d = 0,1 mm. Dies ist zugleich die Unbestimmtheit Δ x der Ortsangabe des Elektrons in der Anodenöffnung.
Wie groß ist die Unschärfe $\Delta\ p_x$ des Querimpulses p_y?

d) Der Bildschirm befinde sich 30 cm hinter der Anodenöffnung. Durch die Streuung der Elektronen erscheint auf dem Bildschirm ein Fleck mit dem Durchmesser 2r = Δa, wo Δa die Unschärfe des Auftreffortes ist.
Berechnen Sie den Radius des Auftreffflecks auf dem Bildschirm.
Vergleichen Sie den dazugehörigen Durchmesser mit dem Durchmesser der Anodenöffnung und erläutern Sie, warum man hier von der "Bahn des Elektrons" sprechen kann.
Unter welchen Bedingungen kann man ein Teilchen mit den Gesetzen der klassischen Physik beschreiben?

Lösung:

a) $v = \sqrt{2\,\frac{e}{m_e}\,U_a} = 8 \cdot 10^7\ \frac{m}{s}$

b) $p = m\ v = 7{,}3 \cdot 10^{-23}\ \frac{kg\ m}{s}\quad \lambda = \frac{h}{p} = 9{,}1 \cdot 10^{-12}\ m = 9{,}1\ pm$

c) $\overline{\Delta p_y} = \frac{h}{\overline{\Delta x}} \approx p\ \sin\alpha = \lambda\,\frac{p}{d} = \frac{h}{d}$

d) $\sin\alpha = \dfrac{p_y}{p} = \dfrac{\overline{\Delta p_y}}{p};\ \tan\alpha = \dfrac{r}{L}$ Durch Gleichsetzen der beiden Winkelfunktionen (kleine Winkel!)

folgt: $r = \dfrac{\overline{\Delta p_y}}{p} L = 2{,}7 \cdot 10^{-5}\ mm.\ \overline{\Delta a} = 2\,r = 5{,}4 \cdot 10^{-5}\ mm.$

Die durch die Unbestimmtheitsrelation bedingte Streuung ist wesentlich kleiner als die Anodenöffnung. Die Elektronen bleiben zusammen du machen den Eindruck eines Strahls, der die Bahn des Elektrons charakterisiert. Allgemein ist dies der Fall, wenn die Wellenlänge des Teilchens kleiner oder gleich den Dimensionen der Öffnung oder des Hindernisses ist.

9.Aufgabe: Die Lage des Schwerpunktes einer Kugel mit der Masse 2 mg kann mit einer Genauigkeit $\Delta x = 2 \cdot 10^{-6}$ m gemessen werden. Welche Bedeutung hat die Unschärferelation bei der Messung der Geschwindigkeit?

10.Aufgabe: Durch einen Spalt der Breite 10^{-5} m fällt ein Elektronenstrahl auf einen Schirm im Abstand von 3 m hinter den Spalt.
a) Wie groß ist die Breite des mittleren Streifens des Beugungsbildes, wenn die Elektronen eine Beschleunigungsspannung von 100 V durchlaufen haben?
b) Welche Geschwindigkeit haben die Elektronen, für die die Breite des mittleren Streifens des Beugungsbildes 2,9 mm beträgt?

11.Aufgabe: Der Ort eines Elektrons, das zu einem Wasserstoffatom gehört, ist nur mit einer Genauigkeit von 10^{-10} m anzugeben. Dies entspricht dem Durchmesser des Atoms. Berechnen Sie die Unschärfe der Geschwindigkeit.

12.Aufgabe: Zeigen Sie mit Hilfe der Unschärferelation, dass die Energie eines Elektrons, das sich im Atomkern mit einem Durchmesser von 10^{-14} m aufhalten würde, die aus Experimenten bestimmte Energie von 10 MeV aufgrund der Wirkung der Kernkräfte bei weitem überschreiten würde, so dass ein Aufenthalt im Kern unmöglich ist.
Wenn der Impuls zwischen -p und +p wechselt, ist die Impulsungenauigkeit $\Delta p = 2 \cdot p$.
Für die relativistische durchzuführende Rechnung ist die Beziehung

$$W_{kin} = — m_o\, c^2$$

zu verwenden.

13.Aufgabe: Zeigen Sie entsprechend Aufgabe 12, dass ein Aufenthalt von Neutronen der Massen $m_N = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg im Kern möglich ist.