

Aufgaben zum Thema radioaktiver Zerfall – Zerfallsgesetz

LK Physik – Sporenberg – 21.11.2013

1. Aufgabe: Der Beta-Zerfall

Der Beta-Zerfall tritt in drei verschiedenen Formen auf β^- -Zerfall, β^+ -Zerfall und K-Einfang. Was beobachtet man jeweils, und was geht dabei im Atom vor?

Der Kern des Niobatoms ^{95}Nb emittiert beim Zerfall β^- -Teilchen mit 159 keV maximaler kinetischer Energie. Der Tochterkern befindet sich zunächst in einem angeregten Zustand von 766 keV, der sehr schnell in den Grundzustand übergeht, Die Anregungsenergie wird in den meisten Fällen durch Emission eines Gammaquants abgebaut.

b) Geben Sie die vollständige Zerfallsgleichung für ^{95}Nb an, und zeichnen Sie ein Energieniveauschema für den Zerfallsprozess.

c) Berechnen Sie die Differenz der Atommassen von ^{95}Nb und dem Zerfallsprodukt. Die Rückstoßenergie des Tochterkerns ist zu vernachlässigen.

Mitunter kommt es vor, dass die Kernanregungsenergie direkt auf ein Elektron aus der K-Schale des Tochteratoms übertragen wird. Dieser Vorgang heißt Konversion (innere Umwandlung der Kernanregung); die dabei ausgesandten Elektronen nennt man Konversionselektronen.

d) Die Bindungsenergie eines K-Elektrons in Molybdän beträgt 20 keV. Geben Sie die kinetische Energie der Konversionselektronen an, und skizzieren Sie qualitativ das gesamte Energiespektrum der beim Zerfall von ^{95}Nb ausgesandten Elektronen.

e) Das Auftreten der Konversion äußert sich auch durch eine sekundäre Strahlung. Wie kommt diese zustande? Berechnen Sie die Energie eines charakteristischen Strahlungsquants.

Lösung

a) β^- -Zerfall:

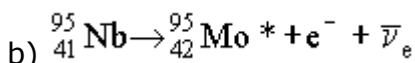
Im Kern wird ein Neutron in ein Proton umgewandelt, es wird ein Elektron und ein Antineutrino frei.

β^+ -Zerfall:

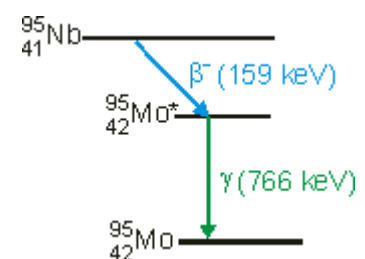
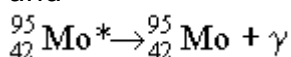
Im Kern wird ein Proton in ein Neutron umgewandelt, es wird ein Positron und ein Neutrino frei.

K-Einfang:

Der Kern fängt ein Hüllenelektron aus der K-Schale ein, Das Hüllenelektron und ein Proton wandeln sich in ein Neutron um. Es wird ein Neutrino frei. Außerdem beobachtet man die charakteristische Röntgenstrahlung, da die K-Schale wieder aufgefüllt wird.



und



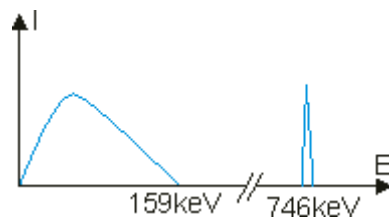
c) Die Energiedifferenz ist die Summe der beiden Zerfallsenergien. Außerdem gilt $E = mc^2$

$$\Delta E = m_a({}_{41}^{95}\text{Nb}) \cdot c^2 - m_a({}_{42}^{95}\text{Mo}) \cdot c^2 = E_{\text{kin, e, max}} + E_\gamma$$

$$\Delta m = \frac{E_{\text{kin,e,max}} + E_{\gamma}}{c^2} \Rightarrow \Delta m = \frac{(0,159 + 0,766)\text{MeV}}{931,5\text{MeV}} \cdot u = 9,93 \cdot 10^{-4} u$$

d) Ein Konversionselektron bekommt die ganze Anregungsenergie von 766 keV mit und muss davon die Bindungsenergie (Ionisierungsenergie) abgeben. =>

$$W_{e,\text{konv}} = 766 \text{ keV} - 20 \text{ keV} = 746 \text{ keV}.$$



e) Die sekundäre Strahlung ist die charakteristische Röntgenstrahlung insbesondere die K_{α} - Linie, die beim Auffüllen des in der K-Schale entstandenen "Lochs" entsteht.

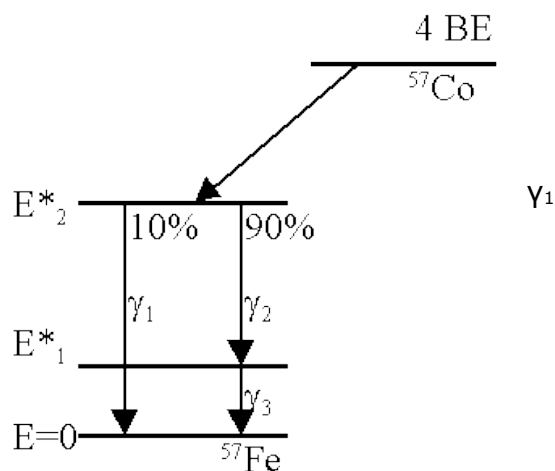
Moseley:
$$E_{\text{Ph}} = \frac{h \cdot c}{\lambda} \text{ mit } \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{4} R \cdot (Z-1)^2 \Rightarrow E_{\text{Ph}} = \frac{3}{4} R \cdot h \cdot c \cdot (Z-1)^2$$

$$E_{\text{Ph}} = \frac{3}{4} \cdot 1,10 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}} \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (42-1)^2 \cdot \frac{e}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 17,2 \text{ keV}$$

2.Aufgabe: Kobalt-57-Zerfall

Das Isotop ^{57}Co zerfällt mit einer Halbwertszeit von 272d durch K-Einfang und nachfolgende Emission von Gammastrahlung in das stabile Isotop ^{57}Fe . Die möglichen Zerfallswege und ihre relativen Häufigkeiten sind im nebenstehenden Termschema vereinfacht dargestellt. Die Wellenlängen der emittierten Photonen und γ_2 sind

$$\lambda_1 = 9,12 \cdot 10^{-12} \text{ m bzw. } \lambda_2 = 1,02 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$



a) Berechnen Sie die beiden Anregungsenergien E_1^* und E_2^* des ^{57}Fe -Kerns und die Wellenlänge λ_3 des dritten Photons γ_3 .

b) Stellen Sie die Gleichung des Zerfalls von ^{57}Co auf. Beschreiben Sie qualitativ die Vorgänge, die sich im Kern und in der Atomhülle abspielen.

c) Berechnen Sie die gesamte freiwerdende Energie (Q-Wert) bei einem Zerfallsereignis. Auf welche drei Strahlungsarten verteilt sich diese Energie?

d) Ein 480 Tage altes ^{57}Co -Präparat wird mit einem Gammadetektor untersucht. Dieser registriert je Minute $5,3 \cdot 10^5$ Quanten der Wellenlänge λ_1 wobei nur 0,27 % der vom Präparat bei dieser Wellenlänge emittierten Photonen nachgewiesen werden. Die Nullrate ist vernachlässigbar. Berechnen Sie die Aktivität des Präparats zum Zeitpunkt der Messung sowie die gesamte Masse an ^{57}Co , die das Präparat bei der Herstellung enthielt.

Lösung

a) $E = \frac{h \cdot c}{\lambda}$ mit den zugehörigen Wellenlängen (siehe Energieschema) ergibt sich:

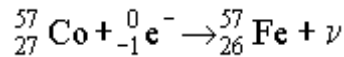
$$E_2^* = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot e}{9,12 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 137 \text{ keV}$$

$$E_2^* - E_1^* = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot e}{1,02 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 122 \text{ keV} \Rightarrow E_1^* = 137 \text{ keV} - 122 \text{ keV} = 15 \text{ keV}$$

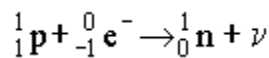
$$\lambda_3 = \frac{h \cdot c}{E_1^*} \Rightarrow \lambda_3 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{15 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 8,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Anmerkung: Durch nicht erfolgte Rundung ergeben sich oft andere Werte.

b) Zerfallsgleichung:



Ein Kernproton wandelt sich mit einem Elektron der K-Schale in ein Neutron um und sendet dabei ein Neutrino aus:



In der Atomhülle wird das entstandene "Loch" in der K-Schale wieder von höheren Schalen gefüllt, was unter Abgabe der charakteristischen Röntgenstrahlung geschieht.

$$c) Q = (m_A({}_{27}^{57}\text{Co}) - m_A({}_{26}^{57}\text{Fe})) \cdot c^2 \Rightarrow Q = (56,936296 - 56,935398) \cdot 931,5 \text{ MeV} = 0,836 \text{ MeV.}$$

Die Energie verteilt sich auf das Neutrino, die g-Strahlung und die charakteristische Röntgenstrahlung.

d) Berechnung der tatsächlichen Zerfallsrate (Aktivität) $A(t)$ zum Zeitpunkt der Messung:

$$A(t) = \frac{5,3 \cdot 10^5}{60 \text{ s} \cdot 0,0027 \cdot 0,1} = 3,3 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{s}}$$

Daraus errechnet man die Aktivität zum Herstellungszeitpunkt:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_H}} \Rightarrow A_0 = A(t) \cdot e^{\frac{\ln 2 \cdot t}{T_H}} \Rightarrow A_0 = 3,3 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{s}} \cdot e^{\frac{\ln 2 \cdot 480}{272}} = 11 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{s}}$$

Daraus errechnet man die Zahl der ${}^{57}\text{Co}$ -Atome zum Zeitpunkt der Herstellung:

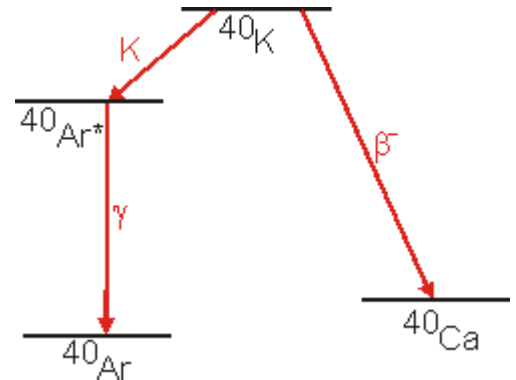
$$A_0 = \frac{\ln 2}{T_H} \cdot N_0 \Rightarrow N_0 = \frac{T_H}{\ln 2} \cdot A_0 \Rightarrow N_0 = 1,1 \cdot 10^8 \frac{1}{s} \cdot \frac{272 \cdot 24 \cdot 3600 s}{\ln 2} = 3,7 \cdot 10^{15}$$

Daraus ergibt sich die Masse:

$$m = N_0 \cdot m_A(\text{Co}) = 3,7 \cdot 10^{15} \cdot 59,9 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{kg} = 3,7 \cdot 10^{-10} \text{kg} = 0,37 \mu\text{g}$$

3.Aufgabe: Zerfall des Radionuklids K-40

Das in natürlichem Kalium vorkommende ^{40}K zerfällt mit einer Halbwertszeit von $1,28 \cdot 10^9$ a. Der Zerfall erfolgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 89,5% durch β^- in das stabile ^{40}Ca und mit einer Wahrscheinlichkeit von 10,5% durch K-Einfang in ^{40}Ar (siehe Zerfallsdiagramm). Die Atommasse von ^{40}K ist 39,963999 u.



a) Geben Sie für den β^- -Zerfall die Zerfallsgleichung an und berechnen Sie die Zerfallsenergie Q .
[zur Kontrolle: $Q = 1,312$ MeV]

Der beim K-Einfang zunächst angeregte Kern geht durch Emission eines γ -Quants mit einer Energie von 1,461 MeV in den Grundzustand über. Neben der γ -Strahlung beobachtet man beim K-Einfang zusätzlich Röntgenstrahlung im Energiebereich von wenigen keV.

b) Beschreiben Sie die beim K-Einfang im Atomkern und in der Atomhülle ablaufenden Vorgänge.

c) Bestimmen Sie Wellenlänge und Energie der K_α -Linie der begleitenden Röntgenstrahlung. [Zur Kontrolle: $E_{K\alpha} = 2,95$ keV]

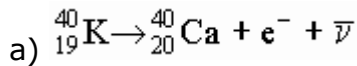
d) Zeigen Sie, dass das emittierte γ -Quant und das Röntgenphoton zusammen 97,3% der beim K-Einfang insgesamt freigesetzten Energie repräsentieren. Wie wird die restliche Energie abgegeben?

Kalium ist für die Muskel- und Nerventätigkeit lebensnotwendig; deshalb sind im menschlichen Körper 2,0 g Kalium pro kg Körpermasse vorhanden. Natürliches Kalium besteht vorwiegend aus den stabilen Nukliden ^{39}K und ^{41}K . Obwohl nur 0,0117% der Atome dieses chemischen Elementes dem radioaktiven ^{40}K zuzuordnen sind, trägt das Nuklid wesentlich zur natürlichen inneren Strahlenbelastung eines Menschen bei.

e) Welcher durchschnittliche Energiebetrag wird als Folge der bei einem ^{40}K Zerfall auftretenden Strahlung im Körpergewebe absorbiert? Gehen Sie davon aus, dass die mittlere Energie beim β^- -Zerfall emittierten Elektronen nur etwa 40% des Maximalwertes beträgt und dass die Energie der als Folge des K-Einfang emittierten Photonen etwa zur Hälfte aus dem Organismus entweicht.
[Zur Kontrolle: $\bar{E} = 0,55$ MeV]

f) Berechnen Sie für einen Menschen der Masse $m = 70$ kg die Aktivität des im Körper enthaltenen ^{40}K und damit die jährliche Äquivalentdosis (in mSv), die von ^{40}K im menschlichen Körper verursacht wird. (Der Bewertungsfaktor für die biologische Wirkung der beteiligten Strahlenarten hat den Wert 1.)

Lösung



$$Q_{\beta^{-}} = [m_a({}_{19}^{40}\text{K}) - m_a({}_{20}^{40}\text{Ca})] \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$Q_{\beta^{-}} = [39,963999 - 39,962591] \cdot 931,49 \text{ MeV} = 1,312 \text{ MeV}$$

b) Beim K-Einfang fängt der Atomkern ein Elektron aus der K-Schale ein. Ein Kernproton reagiert mit dem Elektron zu einem Kernneutron unter Aussendung eines Neutrinos fester Energie. Die K-Schale wird anschließend von Elektronen äußerer Schalen wieder aufgefüllt, wobei die frei werdende Bindungsenergie als Röntgenstrahlung abgegeben wird.

$$c) \frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = \frac{3}{4} R \cdot (18-1)^2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = \frac{3}{4} \cdot 1,097 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}} \cdot (18-1)^2 \Rightarrow \lambda_{K\alpha} = 4,20 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$E_{K\alpha} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{K\alpha}} \Rightarrow E_{K\alpha} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,20 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 4,74 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 2,96 \text{ keV}$$

$$d) E_{\gamma} + E_{\text{ph}} = 1,461 \text{ MeV} + 2,95 \text{ keV} = 1,464 \text{ MeV}$$

$$Q_K = [m_a({}_{19}^{40}\text{K}) - m_a({}_{18}^{40}\text{Ar})] \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$Q_{\beta^{-}} = [39,963999 - 39,962384] \cdot 931,49 \text{ MeV} = 1,504 \text{ MeV}$$

$$\frac{1,464 \text{ MeV}}{1,504 \text{ MeV}} = 0,973 = 97,3\%$$

Das beim K-Einfang emittierte Neutrino erhält die restliche Energie sowie unerheblich der Rückstoßkern und weitere Energien beim Rückfall von äußeren Schalen in die L-Schale der Hülle

e) Ein durchschnittlicher Zerfall ergibt 0,895 beim β^{-} -Zerfälle mit $0,4 \cdot Q_{\beta^{-}}$ sowie 0,105 K-Einfänge mit $0,5 \cdot (E_{\gamma} + E_{\text{ph}}) \Rightarrow$

$$\bar{E} = 0,895 \cdot 0,4 \cdot 1,312 \text{ MeV} + 0,105 \cdot 0,5 \cdot 1,464 \text{ MeV} = 0,55 \text{ MeV}$$

f) Masse ${}^{40}\text{K}$ im 70 kg schweren Menschen: $m_{40\text{K}} = 2\text{g} \cdot 70 \cdot 0,000117 = 16,4 \text{ mg}$

$$\text{Anzahl } {}^{40}\text{K} \text{-Atome: } N = \frac{m_{40\text{K}}}{m_A({}_{19}^{40}\text{K})} = \frac{16,4 \cdot 10^{-6} \text{ kg}}{39,098 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 2,53 \cdot 10^{20}$$

$$\text{Aktivität: } A = \lambda \cdot N \Rightarrow A = \frac{\ln 2}{T_H} \cdot N \Rightarrow A = \frac{\ln 2}{1,28 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot 2,53 \cdot 10^{20} = 4340 \text{ Bq}$$

$$H = q \cdot \frac{E}{m} = \frac{q \cdot A \cdot \Delta t \cdot \bar{E}}{m} \Rightarrow$$

$$H = \frac{1 \cdot 4340 \frac{1}{s} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 0,55 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} J}{70 kg} = 0,172 mSv$$

4. Aufgabe: Zerfall von Lanthan

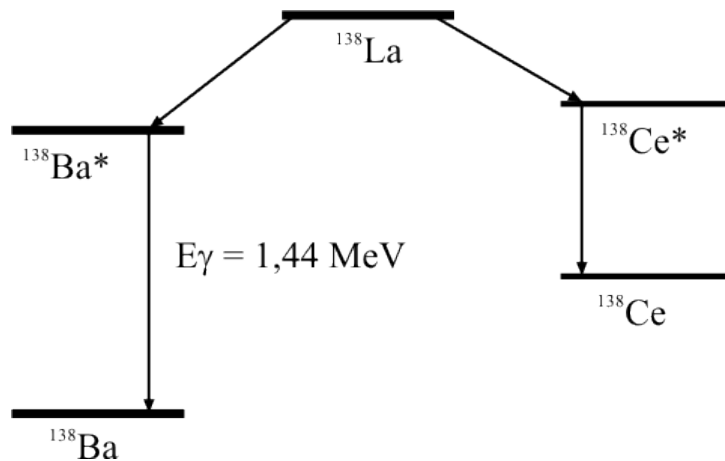
Das Nuklid La ($m_a = 137,907106 u$) besitzt die extrem große Halbwertszeit $T_{1/2} = 1,05 \cdot 10^{11} a$. Bei zwei Dritteln der Zerfälle findet eine Umwandlung in ^{138}Ba statt. In den übrigen Fällen tritt als Endprodukt ^{138}Ce auf. In jedem Fall wird zunächst ein angeregter Zustand des Tochterkerns erzeugt (siehe nebenstehendes, nicht maßstabgetreues Zerfallsschema).

a) Beschreiben Sie eine Methode, wie sich die Halbwertszeit eines so langlebigen Nuklids wie ^{138}La bestimmen lässt.

b) Um welche Zerfallsart handelt es sich bei der Umwandlung in $^{138}Ce^*$? Geben Sie die Zerfallsgleichung an.

c) Beschreiben Sie die Vorgänge, die beim Übergang von ^{138}La zu $^{138}Ba^*$ durch K-Einfang im Atom ablaufen. Erklären Sie, weshalb neben dem γ -Quant noch elektromagnetische Strahlung anderer Wellenlänge auftritt.

d) Grundsätzlich wäre statt des K-Einfangs auch ein β^+ -Zerfall zu $^{138}Ba^*$ denkbar. Zeigen Sie mit Hilfe einer Energiebilanz, dass es sich nicht um diese Zerfallsart handeln kann.



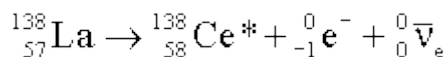
Lösung

a) Man bestimmt von einer ^{138}La -Probe die Teilchenzahl $N(t)$ der ^{138}La -Atome und bestimmt die aktuelle Aktivität $A(t)$.

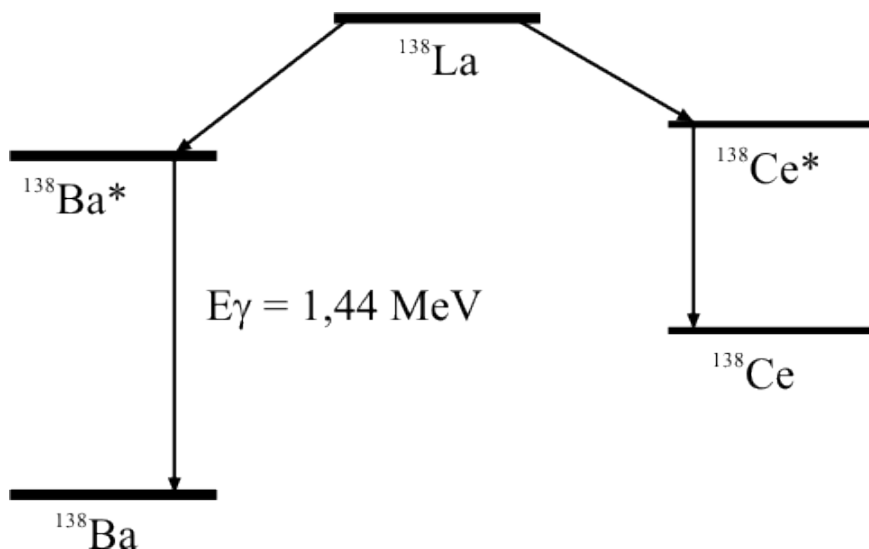
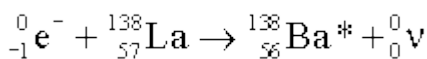
Für die Halbwertszeit gilt dann:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \xrightarrow{A(t) = \lambda \cdot N(t)} T_{1/2} = \frac{N(t) \cdot \ln 2}{A(t)}$$

b) Es handelt sich um einen β^- -Zerfall:



c) Beim K-Einfang findet mit Hilfe eines Hüllenelektrons (aus der K-Schale) die Umwandlung eines Kernprotons in ein Kernneutron statt.



Der angeregte Bariumkern geht durch Emission eines γ -Quants in den Grundzustand über. Die Lücke in der K-Schale der Hülle wird durch ein Elektron aus einem höheren Energiezustand geschlossen. Dabei kommt es zur Emission von charakteristischer Strahlung.

d) Energiebilanz für den β^+ -Zerfall:

$$Q_{\beta^+} = \left[m_a \left({}^{138}_{57}\text{La} \right) - m_a \left({}^{138}_{56}\text{Ba} \right) - 2 \cdot m_{e,0} \right] \cdot c^2$$

$$Q_{\beta^+} = [137,907106 - 137,905232 - 2 \cdot 0,0005486] \cdot u \cdot c^2 \approx 0,72 \text{ MeV}$$

Diese Energie ist kleiner als die angegebene Gammaenergie von 1,44 MeV, so dass es sich bei dem Zerfall nicht um einen β^+ -Zerfall handelt.

6. Aufgabe: Alpha-Zerfall von Plutonium 238

Das Nuklid ${}^{238}\text{Pu}$ ist ein α -Strahler. Die Kerne des Tochternuklids entstehen im Grundzustand oder im ersten angeregten Zustand (Anregungsenergie 43keV), der anschließend durch Emission eines Gammaquants in den Grundzustand übergeht.

a) Geben Sie die Gleichung des Zerfalls von ${}^{238}\text{Pu}$ an und berechnen Sie die gesamte bei einem Zerfall frei werdende Energie Q . Die benötigten Atommassen sind der Formelsammlung zu entnehmen. [zur Kontrolle: $Q = 5,59 \text{ MeV}$]

b) Skizzieren Sie das Energieniveauschema für den Zerfall von ${}^{238}\text{Pu}$ und berechnen Sie die Wellenlänge der emittierten γ -Strahlung.

c) Erstellen Sie die beschriftete Skizze einer Versuchsanordnung, mit der man das Energiespektrum der α -Teilchen mit Hilfe eines Magnetfeldes experimentell bestimmen kann. Leiten Sie (nichtrelativistisch) eine Beziehung für die kinetische Energie der α -Teilchen in Abhängigkeit von Messgrößen und Naturkonstanten her.

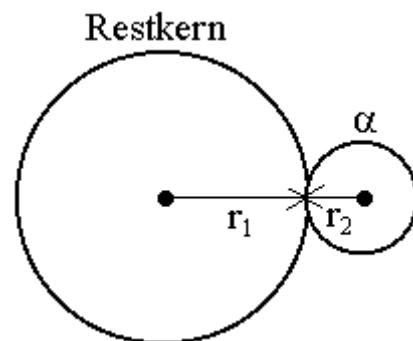
d) Die Messung ergibt, dass die maximale kinetische Energie der α -Teilchen 5,50 MeV beträgt. Dieser Wert unterscheidet sich deutlich vom Q -Wert aus Teilaufgabe 1a. Zeigen Sie durch eine nichtrelativistische Rechnung, dass der Rückstoß des Zerfallsproduktes für diese Energiedifferenz verantwortlich ist.

e) Auch das Tochternuklid des ${}^{238}\text{Pu}$ und mehrere Zerfallsprodukte des Tochternuklids sind instabil. Welches Nuklid ist das stabile Endprodukt? Wie viele α -Zerfälle und wie viele β -Zerfälle erfolgen insgesamt?

Modellvorstellung vom Alphazerfall von ${}^{238}\text{Pu}$

Zunächst soll das folgende "klassische" Modell für den Zerfall von ${}^{238}\text{Pu}$ betrachtet werden:

Das α -Teilchen beginnt gerade sich vom Restkern zu lösen ($v \approx 0$). Beide Teilchen werden als kugelförmig angenommen.

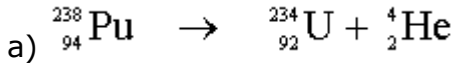


f) Berechnen Sie die Kernradien und schätzen Sie die beim Auseinanderfliegen der Bruchstücke auf Grund der elektrischen Abstoßung entstehende kinetische Energie E_{kin} ab. [zur Kontrolle: $E_{\text{kin}} = 24 \text{ MeV}$]

Das Ergebnis von Teilaufgabe 2a widerspricht dem in Teilaufgabe 1a berechneten Q-Wert. Der Widerspruch kann mit einer quantenmechanischen Modellvorstellung erklärt werden. Erläutern Sie diese Modellvorstellung.

g) Skizzieren Sie dazu den Potenzialtopf des Restkerns für α -Teilchen und machen Sie in der Skizze deutlich, wo die beiden berechneten Energiewerte erscheinen (Maßstab für die Ordinate: $5\text{MeV} \rightarrow 1\text{cm}$).

Lösung



$$Q = (m_{\text{Pu},0} - m_{\text{U},0} - m_{\text{He},0}) \cdot c^2;$$

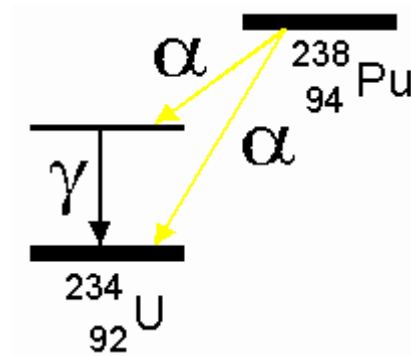
$$Q = (238,04951 - 234,04090 - 4,0026036) \cdot u \cdot c^2 = 0,0060064 \cdot u \cdot c^2$$

$$Q = 0,0060064 \cdot 931,49\text{MeV} \approx 5,59\text{MeV}$$

b) $E_\gamma = 43\text{keV};$ $E_\gamma = \frac{h \cdot c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E_\gamma}$

$$\lambda = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 2,997 \cdot 10^8 \text{ J} \cdot \text{s} \cdot \text{m}}{43 \cdot 10^3 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ s}}$$

$$\lambda \approx 2,9 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$



c) Auf der Kreisbahn gilt: Zentripetalkraft = Lorentzkraft

$$\frac{m_\alpha \cdot v^2}{r} = 2 \cdot e \cdot v \cdot B \Rightarrow v = \frac{2 \cdot e \cdot v \cdot B \cdot r}{m_\alpha} \quad (1)$$

$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_\alpha \cdot v^2$ mit (1) ergibt sich:

$$E_{\text{kin}} = \frac{2 \cdot e^2 \cdot B^2 \cdot r^2}{m_\alpha}$$

r: Bahnradius



Der Gesamtimpuls vor dem Zerfall wird als Null angenommen, also muss der Impuls nach dem Stoß auch Null sein. Es gilt dann:

$$v_k = \frac{m_\alpha \cdot v_\alpha}{m_k}$$

$$m_k \cdot v_k = m_\alpha \cdot v_\alpha ; \Rightarrow$$

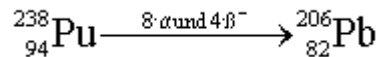
Für die kinetische Energie des Rückstoßkernes nach dem Zerfall gilt:

$$E_{kin,k} = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot v_k^2 \Rightarrow E_{kin,k} = \frac{1}{2} m_k \cdot \left(\frac{m_\alpha \cdot v_\alpha}{m_k} \right)^2 \Rightarrow E_{kin,k} = \frac{m_\alpha}{m_k} \cdot E_{kin,\alpha}$$

$$E_{kin,k} = \frac{4}{234} \cdot 5,50 \text{ MeV} = 0,094 \text{ MeV}$$

Man sieht also, dass $E_{kin,k} + E_{kin,\alpha} \approx Q$

e) Das Plutonium geht durch 8 Alpha-Zerfälle (Verminderung der Massezahl um 32; Verminderung der Kernladungszahl um 16) und 4 Beta-Minus-Zerfälle (keine Änderung der Massezahl; Erhöhung der Kernladungszahl um 4) in ein stabiles Bleisotop über:



$$f) r_k = 1,4 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{A_k} \text{ m}; \quad r_k = 1,4 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{234} \text{ m}; \quad r_k = 8,6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$r_\alpha = 1,4 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{A_\alpha} \text{ m}; \quad r_\alpha = 1,4 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt[3]{4} \text{ m}; \quad r_\alpha = 2,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Das Alpha-Teilchen bewegt sich im elektrostatischen Feld des Restkernes weg und verliert dabei die potenzielle Energie:

$$\Delta E_{pot,\alpha} = \int_{r_k+r_\alpha}^{\infty} \frac{2 \cdot e \cdot 92 \cdot e}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} = - \frac{184 \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot (r_k + r_\alpha)}$$

$$\Delta E_{pot,\alpha} = - \frac{184 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19})^2}{4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10,8 \cdot 10^{-15}} \text{ J} = -3,93 \cdot 10^{-12} \text{ J} \approx -24 \text{ MeV}$$

Der Verlust an potentieller Energie entspricht der gesamten kinetischen Energie der Bruchstücke.

6.Aufgabe: Alpha-Zerfall von Polonium-210

Das Polonium-Isotop ^{210}Po geht durch α -Zerfall mit einer Halbwertszeit von 138 d in ^{206}Pb über.

Atommassen: ^{210}Po : 209,98288u; ^{206}Pb : 205,97447u

- a) Ermitteln Sie die Energiebilanz (Q-Wert) des Prozesses. [zur Kontrolle: 5,4 MeV]
b) Wie groß ist die maximale kinetische Energie des α -Teilchens, wenn man annimmt, dass der Ausgangskern ruht? (Nichtrelativistische Rechnung.) Warum können auch andere diskrete Energiewerte von α -Teilchen vorkommen?

Es liegt ein Präparat von 1,00 mg ^{210}Po vor, das in einer gasdichten ansonsten zunächst evakuierten Kapsel mit einem Innenvolumen von 12mm^3 eingeschlossen ist.

- c) Wie groß ist die totale Wärmeabgabe des Präparats während der ersten 100 Tage, wenn die gesamte freiwerdende Energie in Wärme umgesetzt wird?
d) Welcher Gasdruck herrscht nach 100 Tagen bei 20°C in der Kapsel, wenn alles gebildete Helium dort verbleibt?

Lösung

a) $Q = (m(\text{Po}) - m(\text{Pb}) - m(\text{He})) \cdot c^2 = 5,4\text{MeV}$

b) Impulssatz: $m_{\text{He}} \cdot v_{\text{He}} = m_{\text{Pb}} \cdot v_{\text{Pb}}$

Energiesatz: $0,5 \cdot m_{\text{He}} \cdot v_{\text{He}}^2 + 0,5 \cdot m_{\text{Pb}} \cdot v_{\text{Pb}}^2 = Q$

$E_{\text{kin},\alpha} = 5,3\text{MeV}$

Es können auch niedrigere α -Energien vorkommen, wenn man davon ausgeht, dass der Tochterkern zunächst in einen angeregten Zustand übergeführt wird.

c) $N(0) - N(t) = 1,13 \cdot 10^{18}$
 $E_{\text{total}} = 9,8 \cdot 10^5 \text{ J}$

d) $p \cdot V = (N(0) - N(t)) \cdot k \cdot T \Rightarrow p = 3,8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

7.Aufgabe: Zerfall von Americium

Americium-241 ist ein α -Strahler mit einer Halbwertszeit von $4,3 \cdot 10^2 \text{ a}$. Die Energie der α -Strahlung beträgt 5,48 MeV, die der dabei gleichzeitig emittierten γ -Strahlung 0,057 MeV.

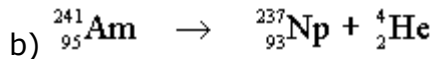
- a) In welcher Zerfallsreihe ist Americium-241 einzuordnen? Geben sie an, aus welchem Nuklid und durch welche Zerfallsart Americium-241 in dieser Reihe entsteht. Warum kann man es heute in natürlicher Umgebung dennoch nicht nachweisen?
b) Stellen Sie die Reaktionsgleichung des α -Zerfalls von Americium-241 auf und berechnen Sie die dabei frei werdende Energie Q. [zur Kontrolle: $Q = 5,63\text{MeV}$]
c) Bestimmen Sie an Hand der gegebenen Energiewerte die kinetische Energie des neben dem He-Kern entstandenen Teilchens. Bestätigen Sie, dass näherungsweise gilt: Die kinetischen Energien der beiden Zerfallsprodukte verhalten sich umgekehrt wie ihre Massen.

Lösung

a) Americium-241 ist in die Neptunium-Reihe einzuordnen. Die Massezahl gehört ebenso wie die von Neptunium zur $4n+1$ -Reihe (Änderung der Massezahl erfolgt nur durch den α -Zerfall und dies in Stufen von 4 Einheiten).

Americium-241 entsteht durch β^- -Zerfall aus dem Mutter-Nuklid Plutonium-241.

Da in der Neptuniumreihe kein so langlebiges Mutternuklid vorhanden ist, wie in den anderen Reihen, kann das Americium-241 heute nicht mehr in natürlicher Umgebung nachgewiesen werden.



$$Q = [m_a(\text{Am}) - (m_a(\text{Np}) + m_a(\text{He}))] \cdot c^2$$

$$Q = [241,05682\text{u} - (237,04817\text{u} + 4,002603\text{u})] \cdot c^2$$

$$Q = 0,006047 \cdot 931,49 \text{ MeV} = 5,63 \text{ MeV}$$

$$c) \quad E_{\text{kin, Np}} = Q \cdot E_{\text{kin, } \alpha} - E_\gamma$$

$$E_{\text{kin, Np}} = 5,63\text{MeV} - 5,48\text{MeV} - 0,057\text{MeV} = 0,096\text{MeV}$$

$$\frac{E_{\text{kin, Np}}}{E_{\text{kin, } \alpha}} = \frac{0,096}{5,48} = 0,017 \quad \text{und} \quad \frac{m_\alpha}{m_{\text{Np}}} = \frac{4,002603}{237,04817} = 0,017$$

8. Aufgabe: Zerfallsgesetz

Zur Untersuchung eines radioaktiven Präparates wurden die Impulsraten zu verschiedenen Zeiten ermittelt und daraufhin die Anzahl N der jeweils noch nicht zerfallenen Kerne berechnet. Es ergab sich folgende Messreihe:

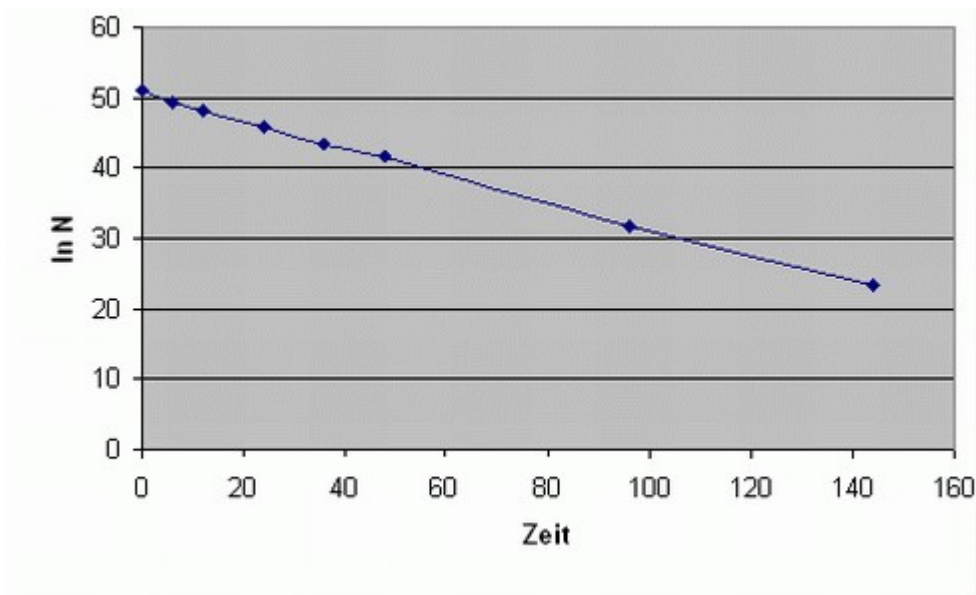
t in h	6	12	24	36	48	96	144
N	$3,04 \cdot 10^{21}$	$8,26 \cdot 10^{20}$	$7,64 \cdot 10^{19}$	$6,34 \cdot 10^{18}$	$1,00 \cdot 10^{18}$	$6,34 \cdot 10^{13}$	$1,25 \cdot 10^{10}$

a) Stellen Sie den natürlichen Logarithmus von N als Funktion der Zeit graphisch dar und ermitteln Sie die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene Anzahl von Kernen.

b) Berechnen Sie die Halbwertszeit für den dargestellten Zerfallsvorgang.

Lösung

t in h	6	12	24	36	48	96	144
N	$3,04 \cdot 10^{21}$	$8,26 \cdot 10^{20}$	$7,64 \cdot 10^{19}$	$6,34 \cdot 10^{18}$	$1,00 \cdot 10^{18}$	$6,34 \cdot 10^{13}$	$1,25 \cdot 10^{10}$
ln N	49,5	48,2	45,8	43,3	41,5	31,8	23,2



$$N_0 = 1,4 \cdot 10^{22}$$

$$N = 3,04 \cdot 10^{21}$$

Gegeben: $t = 6\text{h}$

Für die Anzahl der noch vorhandenen Kerne gilt:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Mit:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

wird daraus:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}}$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\ln 2 \cdot \left(-\frac{t}{T_{1/2}}\right)}$$

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

Diese Gleichung muss nach der Halbwertszeit umgestellt werden:

$$\frac{N(t)}{N_0} = 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

$$\ln \frac{N(t)}{N_0} = \ln 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

$$\ln \frac{N(t)}{N_0} = -\frac{t}{T_{1/2}} \cdot \ln 2$$

$$T_{1/2} = -\frac{t \cdot \ln 2}{\ln \frac{N(t)}{N_0}}$$

$$T_{1/2} = -\frac{6\text{h} \cdot \ln 2}{\ln \frac{3,04 \cdot 10^{21}}{1,4 \cdot 10^{22}}}$$

$$T_{1/2} = 2,7\text{h}$$

Berechnet man für alle Messwerte die Halbwertszeit, erhält man als Mittelwert 3,2 h.

Antwort: Die Halbwertszeit beträgt 3,2 h.

Die Gleichung der Zerfallskurve lautet:

$$N(t) = 1,4 \cdot 10^{22} \cdot e^{-0,194472 \cdot t}$$

Aus der graphischen Darstellung kann man die Steigung bzw. die Zerfallskonstante ermitteln:

$$m = -\lambda = \frac{\ln(7,64 \cdot 10^{19}) - \ln(6,34 \cdot 10^{13})}{24 - 96} = \frac{45,7825 - 31,7805}{-72} = \frac{14,002}{-72} = -0,194472$$

$$\text{Für die Halbwertszeit gilt: } t_H = \frac{\ln 2}{\lambda} = 3,56 \text{ h}$$

9. Aufgabe:

Geben Sie die Gleichungen für die Kernumwandlung an!

^{17}N Beta-Minus Strahler

^{62}Zn Elektroneneinfang

^{45}Ca Beta-Minus Strahler

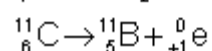
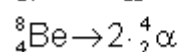
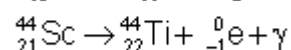
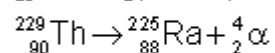
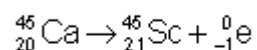
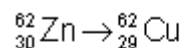
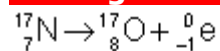
^{229}Th Alpha Strahler

^{44}Sc Beta-Minus Strahler und Gamma Strahler

^8Be 2 Alpha Strahler

^{11}C Beta-Plus Strahler

Lösung



10. Aufgabe: a) Der Beta-Zerfall tritt in drei verschiedenen Formen auf β^- -Zerfall, β^+ -Zerfall und K-Einfang. Was beobachtet man jeweils, und was geht dabei im Atom vor? Der Kern des Niobatoms Nb-95 emittiert beim Zerfall β^- -Teilchen mit 159 keV maximaler kinetischer Energie. Der Tochterkern befindet sich zunächst in einem angeregten Zustand von 766 keV, der sehr schnell in den Grundzustand übergeht, Die Anregungsenergie wird in den meisten Fällen durch Emission eines Gammaquants abgebaut.

b) Geben Sie die vollständige Zerfallsgleichung für Nb-95 an, und zeichnen Sie ein Energieniveauschema für den Zerfallsprozess.

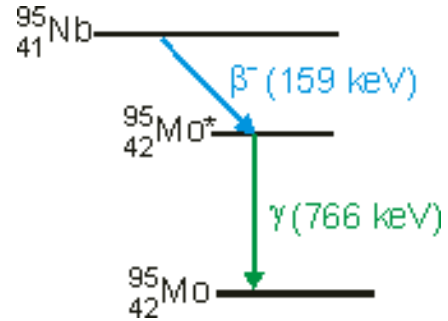
c) Berechnen Sie die Differenz der Atommassen von Nb-95 und dem Zerfallsprodukt. Die Rückstoßenergie des Tochterkerns ist zu vernachlässigen. Mitunter kommt es vor, dass die Kernanregungsenergie direkt auf ein Elektron aus der K-Schale des Tochteratoms übertragen wird. Dieser Vorgang heißt Konversion (innere Umwandlung der Kernanregung); die dabei ausgesandten Elektronen nennt man Konversionselektronen.

d) Die Bindungsenergie eines K-Elektrons in Molybdän beträgt 20 keV. Geben Sie die kinetische Energie der Konversionselektronen an, und skizzieren Sie qualitativ das gesamte Energiespektrum der beim Zerfall von Nb-95 ausgesandten Elektronen.

e) Das Auftreten der Konversion äußert sich auch durch eine sekundäre Strahlung. Wie kommt diese zustande? Berechnen Sie die Energie eines charakteristischen Strahlungsquants.

Konversionselektronen: Ein angeregter Kern K^ gibt ein hochenergetisches Photon ab. Dies trifft ein Elektron (meist auf der K-Schale).*

Lösung:



c) Die Energiedifferenz ist die Summe der beiden Zerfallsenergien. Außerdem gilt $W = m c^2$.

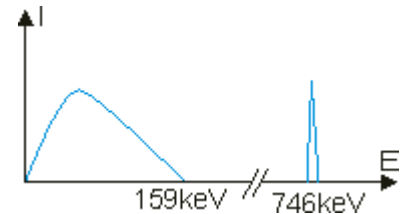
$$\Delta W = \Delta m c^2 = (m_a(\text{Nb}) - m_a(\text{Mo})) c^2 = W_{\text{kin,e,max}} + W_\gamma$$

Löst man nach Δm auf und setzt die gegebenen Werte ein, so erhält man:

$$\Delta m = 9,93 \cdot 10^{-4} \text{ u.}$$

d) Ein Konversionselektron bekommt die ganze Anregungsenergie von 766 keV mit und muss davon die Bindungsenergie (Ionisierungsenergie) abgeben $\Rightarrow W_{\text{e,konv}} = 766 \text{ keV} - 20 \text{ keV} = 746 \text{ keV}$.

e) Die sekundäre Strahlung ist die charakteristische Röntgenstrahlung insbesondere die K_α -Linie, die beim Auffüllen des in der K-Schale entstandenen "Lochs" entsteht.



$$\text{Moseley: } W_{\text{ph}} = \frac{hc}{\lambda} \text{ mit } \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{4} R(Z-1)^2 \Rightarrow W_{\text{ph}} = \frac{3}{4} R h c (Z-1)^2$$

$$W_{\text{ph}} = \frac{3}{4} \cdot 1,10 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}} \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (42-1)^2 \cdot \frac{e}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 17,2 \text{ keV}$$

11. Aufgabe: In einem Isotopengenerator zerfällt CS-137 unter Aussendung von β -Strahlung mit einer großen Halbwertszeit in Barium Ba-137. Der Übergang erfolgt teilweise direkt in den stabilen Grundzustand Ba-137*. Letztere geht unter Aussendung von γ -Strahlung in den Grundzustand über. Das Barium lässt sich aus dem Isotopengenerator herauswaschen und kann mit einem Geiger-Müller-Zählrohr isoliert untersucht werden. Für Messzeiten von 10 s ergeben sich folgende Impulszahlen:

t in min	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
n in Impulsen/ 10 s	928	821	703	624	532	478	413	371	309	275

t in min	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5
----------	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----

n in Impulsen/ 10 s	248	211	180	167	140	130	112	92	80	76

Die Nullrate wurde vorher zu 38 Impulse/min bestimmt.

a) Bereinigen Sie die Impulsrate um die Nullrate und tragen Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von der Zeit auf.

b) Bestimmen Sie die Halbwertszeit des Bariums Ba-137* und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit den Angaben der Nuklidkarte.

c) Erklären Sie die Vorgänge in einem Geiger-Müller-Zählrohr.