Aufgaben zu den Wellen mit Lösung - 14.03.2011

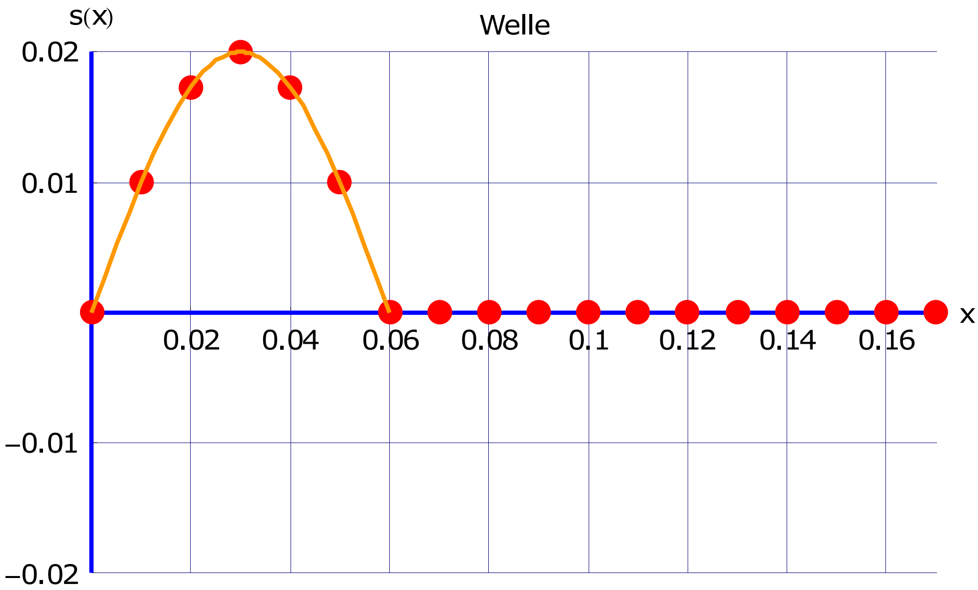
1.Aufgabe: Auf einem linearen Wellenträger befinden sich 18 Massenpunkte in je 1 cm Abstand. Das Teilchen P_o werde bei t = 0,0 s zu sinusförmigen Schwingungen (s_{max} = 2,0 cm) quer zum Träger angeregt. Wenn P_o zum ersten Mal nach 1,5 s maximal ausgelenkt ist, beginnt P_3 zu schwingen.

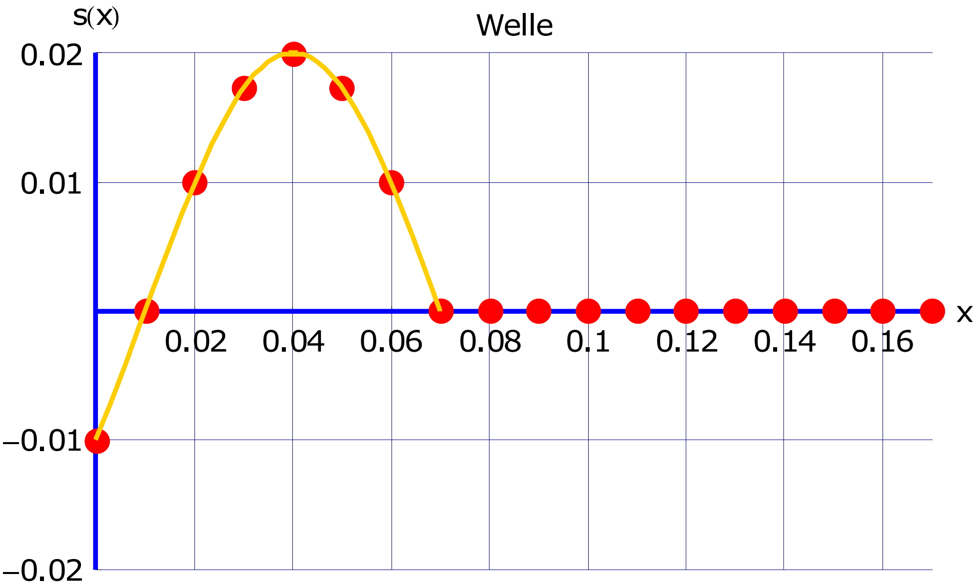
a) Zeichnen Sie die Welle in drei Skizzen nach 3 s, 3,5 s, 13 s maßstäblich untereinander. Geben Sie T und c an!

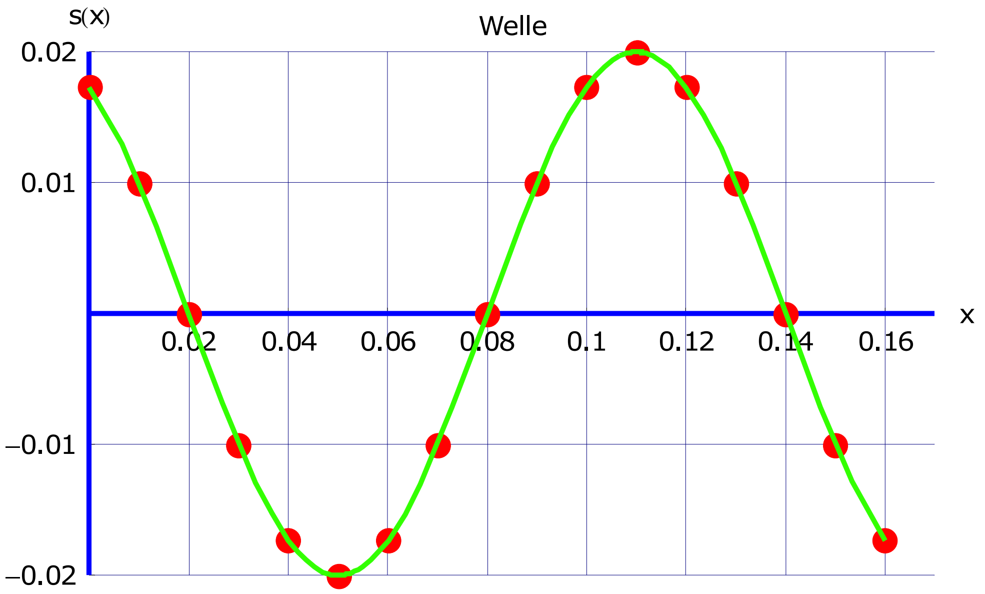
b) Mit welcher Phasendifferenz schwingen P_6 und P_8? Welchen Abstand haben zwei Punkte, deren Phasendifferenz $\Delta\varphi = 7/6\ \pi$ beträgt?

Lösung

a)







2.Aufgabe: Eine lineare harmonische Welle wandere mit der Geschwindigkeit c = 1,6 m/s vom Ursprung eines Koordinatensystems in Richtung der positiven x-Achse. Dabei begann das Teilchen an der Stelle x = 0 zur Zeit t = 0 s mit der Schwingung in Richtung der negativen s-Achse. Die Wellenlänge beträgt λ = 16 cm, die Amplitude s_{max} = 2 cm.

a) Wie groß sind Frequenz und Periodendauer?

b) Zeichnen Sie ein Momentanbild des Trägers für t = T/4 im Bereich von $0 \leq x \leq \lambda$.

c) Zeichnen Sie außerdem den zeitlichen Verlauf der Auslenkung eines Teilchens an der Stelle x_1 = 12 cm in ein t-s-Diagramm für $0 \leq t \leq T$ (0,01 s entspricht 1 cm).

3.Aufgabe: Im Nullpunkt eines Koordinatensystems findet vom Zeitpunkt t_0 = 0 s an eine Schwingung statt, die dem Gesetz

$s(t) = 0{,}08\ m \cdot \sin(\pi\, t\, s^{-1})$ genügt.

Diese Schwingung erzeugt eine Transversalwelle, die sich ungedämpft in Richtung der positiven x-Achse mit der Geschwindigkeit c = 0,2 m/s ausbreitet.

a) Wie groß sind die Schwingungsdauer T und die Frequenz f der Schwingung, wie groß ist die Wellenlänge λ der Welle?

b) Wie lautet die Gleichung dieser Welle?

c) Zeichnen Sie die Welle zu den Zeiten t_1 = 2 s, t_2 = 3 s, t_3 = 4,5 s, t_4 = 7,5 s.

d) Wie lauten die Gleichungen für die Schwingungen, die in den Punkten mit den Koordinaten x_1 = 30 cm, x_2 = 80 cm und x_3 = 100 cm stattfinden?

Anleitung: Verwenden Sie die trigonometrische Beziehung:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Lösung

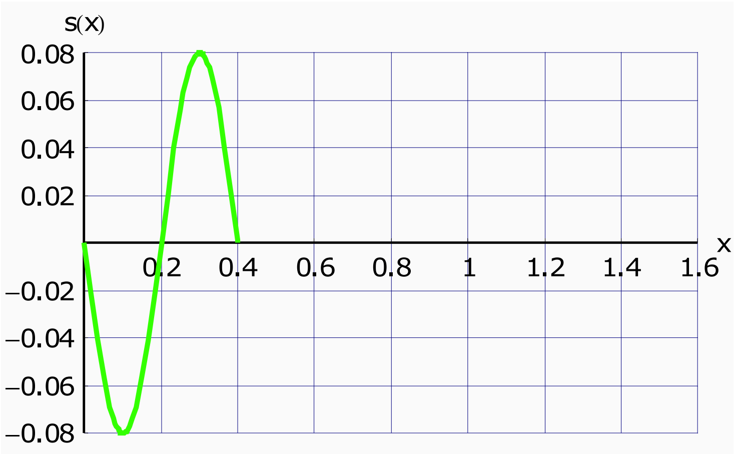
a)

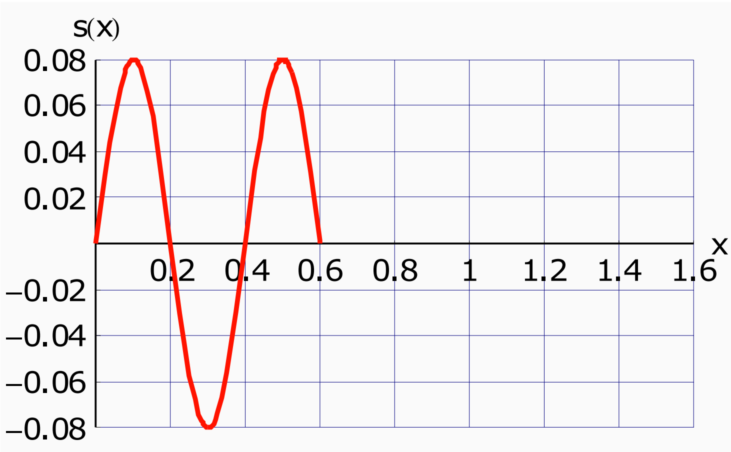
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\,\frac{1}{s} \quad T = 2\,s \quad f = \frac{1}{T} = 0{,}5\,\frac{1}{s}$$

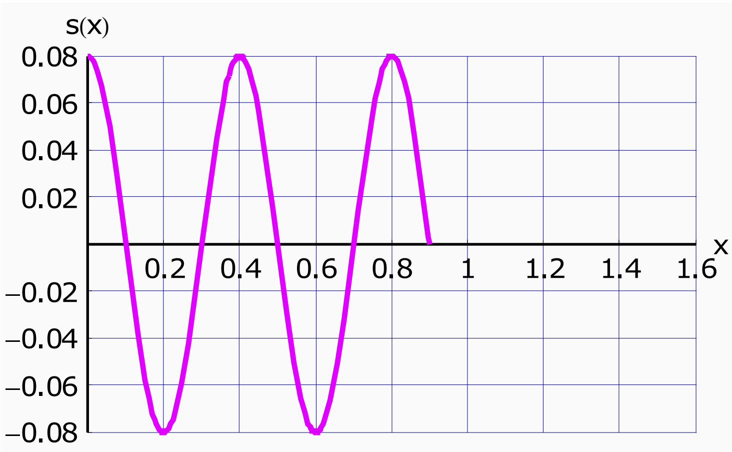
$$\lambda = \frac{c}{f} = 0{,}4\,m = 40\ cm$$

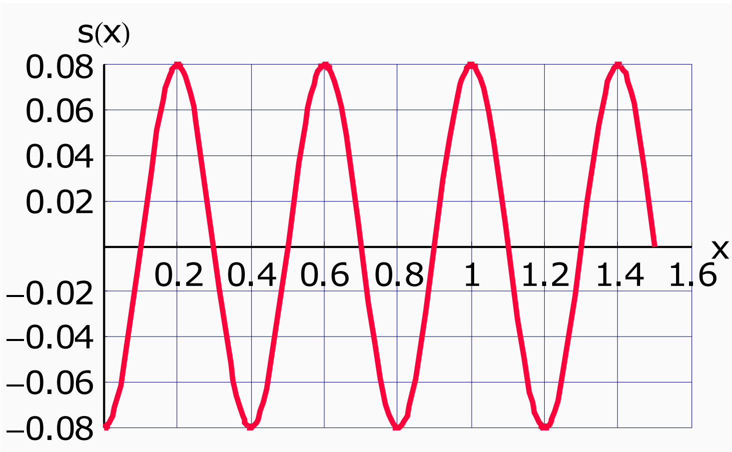
b) $s(x,t) = s_{\max} \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) = 0{,}08\ m \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{2\,s} - \frac{x}{0{,}4\ m}\right)\right)$

c)









d) Die Gleichungen lauten:

$$\text{für } x1 = 30 \ cm$$

$$s(0{,}3\ m, t) = 0{,}08\ m\ \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{2\,s} - \frac{0{,}3\,m}{0{,}4\ m}\right)\right)$$

$$\text{für } x2 = 80 \ cm$$

$$s(0{,}8\ m, t) = 0{,}08\ m\ \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{2\,s} - \frac{0{,}8\,m}{0{,}4\ m}\right)\right)$$

$$\text{für } x3 = 100 \ cm$$

$$s(1{,}0\ m, t) = 0{,}08\ m\ \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{2\,s} - \frac{1{,}0\ m}{0{,}4\ m}\right)\right)$$

4.Aufgabe: a) Bei einer Welle ist λ = 2 m, f = 30 Hz. Bestimmen Sie c!
b) Eine Welle besitzt die Ausbreitungsgeschwindigkeit 5 m/s und die Wellenlänge 4 cm. Wie groß ist die Frequenz?
c) Von einer Welle kennt man c = 2000 m/s und f = 440 Hz. Wie groß ist die Wellenlänge?

Lösung

a) $c = \lambda f = 2\ m \cdot 30\ Hz = 60\ m/s$

b) $f = c/\lambda = 5\ m/s\ /\ 0{,}04\ m = 125\ Hz$

c) $\lambda = c/f = 2000\ m/s\ /\ 440\ Hz = 4{,}54\ m$

5.Aufgabe: Eine harmonische Schwingung breite sich vom Nullpunkt als transversale Störung längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit v_{Ph} = 7,5 mm/s aus. Für die Amplitude und die Kreisfrequenz dieser Schwingung gilt:

$$A = 1{,}0\ cm; \quad \omega = \frac{\pi}{2}\,Hz\ ;$$

a)Berechnen Sie die Periodendauer T, die Frequenz f und die Wellenlänge.
b) Wie heißt die Wellengleichung?
c) Zeichnen Sie maßstäblich das Momentbild der Störung nach t_1 = 4s, t_2 = 6s und t_3 = 9s.
d) Wie heißen die Schwingungsgleichungen für die Oszillatoren, die an den Orten x_1 = 5,25cm bzw. x_2 = 7,5cm von der Störung erfasst werden?

Lösung

a)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}\,s^{-1}} = 4{,}0\,s$$

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}25\,Hz$$

$$c = \frac{\lambda}{T} \quad \Rightarrow \quad \lambda = c \cdot T = 7{,}5\,\frac{mm}{s} \cdot 4{,}0\,s = 30\,mm$$

b) Die Wellengleichung lautet:

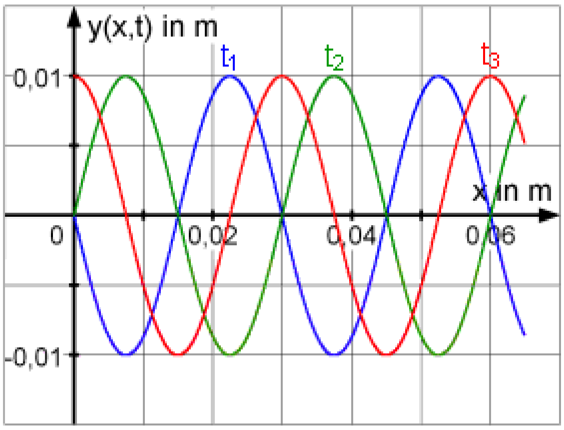
$$y(x,t) = 0{,}01m \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{4{,}0\,s} - \frac{x}{0{,}03m}\right)\right]$$

c) Funktionsgleichungen und Graphen der gesuchten Momentanbilder:

$$y(x,t_1) = 0{,}01\,m \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{4\,s}{4\,s} - \frac{x}{0{,}03\,m}\right)\right]$$
$$y(x,t_1) = 0{,}01\,m \cdot \sin\left[2\pi - 2\pi\frac{x}{0{,}03\,m}\right]$$
$$y(x,t_1) = 0{,}01\,m \cdot \sin\left[-2\pi\frac{x}{0{,}03\,m}\right]$$
$$y(x,t_1) = -0{,}01\,m \cdot \sin\left[2\pi\frac{x}{0{,}03\,m}\right]$$

$$y(x,t_2) = 0{,}01\,m \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{6\,s}{4\,s} - \frac{x}{0{,}03\,m}\right)\right]$$
$$y(x,t_2) = 0{,}01\,m \cdot \sin\left[3\pi - 2\pi\frac{x}{0{,}03\,m}\right]$$
$$y(x,t_2) = -0{,}01\,m \cdot \sin\left[-2\pi\frac{x}{0{,}03\,m}\right]$$
$$y(x,t_2) = 0{,}01\,m \cdot \sin\left[2\pi\frac{x}{0{,}03\,m}\right]$$

$$y(x,t_3) = 0{,}01\,m \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{9\,s}{4\,s} - \frac{x}{0{,}03\,m}\right)\right]$$
$$y(x,t_3) = 0{,}01\,m \cdot \sin\left[\frac{9}{2}\pi - 2\pi\frac{x}{0{,}03\,m}\right]$$
$$y(x,t_3) = 0{,}01\,m \cdot \sin\left[\frac{1}{2}\pi - 2\pi\frac{x}{0{,}03\,m}\right]$$
$$y(x,t_3) = 0{,}01\,m \cdot \cos\left[-2\pi\frac{x}{0{,}03\,m}\right]$$
$$y(x,t_3) = 0{,}01\,m \cdot \cos\left[2\pi\frac{x}{0{,}03\,m}\right]$$



d) An der Stelle x_1 = 5,25 cm beginnt die Störung nach der Zeit $t_1 = x_1/c$ = 7,0 s mit der Schwingung. Dies ergibt sich auch aus der Wellengleichung:

$$y(x_1,t) = 0{,}01m \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{4\,s} - \frac{0{,}0525m}{0{,}03m}\right)\right]$$

$$y(x_1,t) = 0{,}01m \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{s} - 7\right)\right]$$

Für die Stelle x_2 folgt entsprechend:

$$y(x_2, t) = 0{,}01\text{m} \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{4\,\text{s}} - \frac{0{,}075\text{m}}{0{,}03\text{m}}\right)\right]$$

$$y(x_2, t) = 0{,}01\text{m} \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{\text{s}} - 10\right)\right]$$