Aufgaben zum Thema Elektromagnetische Schwingungen – 10.03.2011

1.Aufgabe:

a)An eine vertikal aufgehängte Schraubenfeder wird ein Körper mit der Masse m = 0,30 kg gehängt. Dadurch wird die Feder um x = 1,2 cm gedehnt. Das System wird durch einen Stoß in Schwingungen versetzt.
1.) Berechnen Sie die Schwingungsdauer des Federpendels.
2.) Mit der gleichen Schwingungsdauer T soll ein elektromagnetischer Schwingkreis mit der Induktivität L = 70 H schwingen. Berechnen Sie die dazu erforderliche Kapazität.
b) Stellen Sie in einer Reihe von beschrifteten Skizzen die verschiedenen Schwingungszustände eines Federpendels und eines elektromagnetischen Schwingkreises für die Zeitpunkte $t_1 = 0$, $t_2 = 0{,}25T$, $t_3 = 0{,}50T$ und $t_4 = 0{,}75T$ einander gegenüber.

Lösung

a)
1.

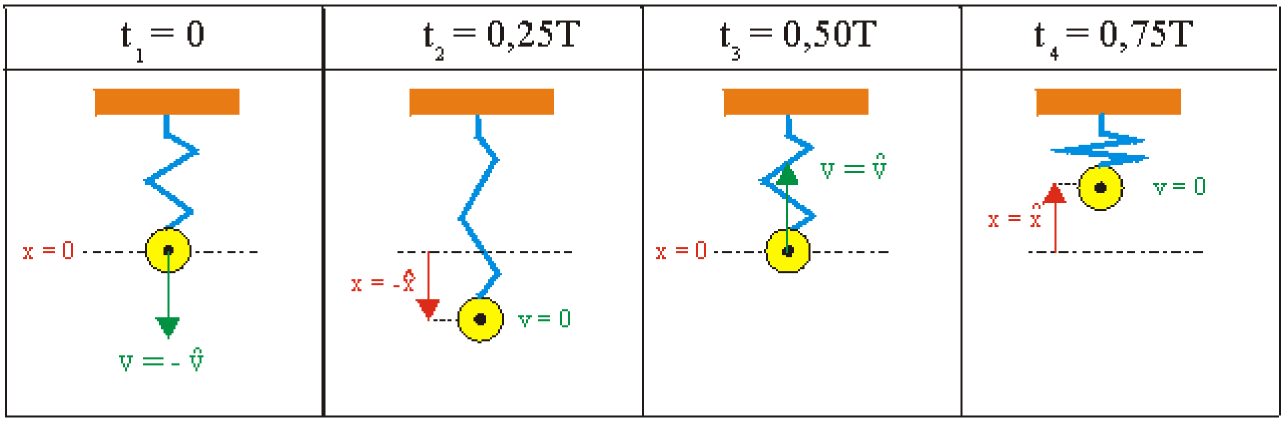
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \quad \text{mit } D = \frac{m \cdot g}{x} \quad \Rightarrow \quad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{x}{g}}$$

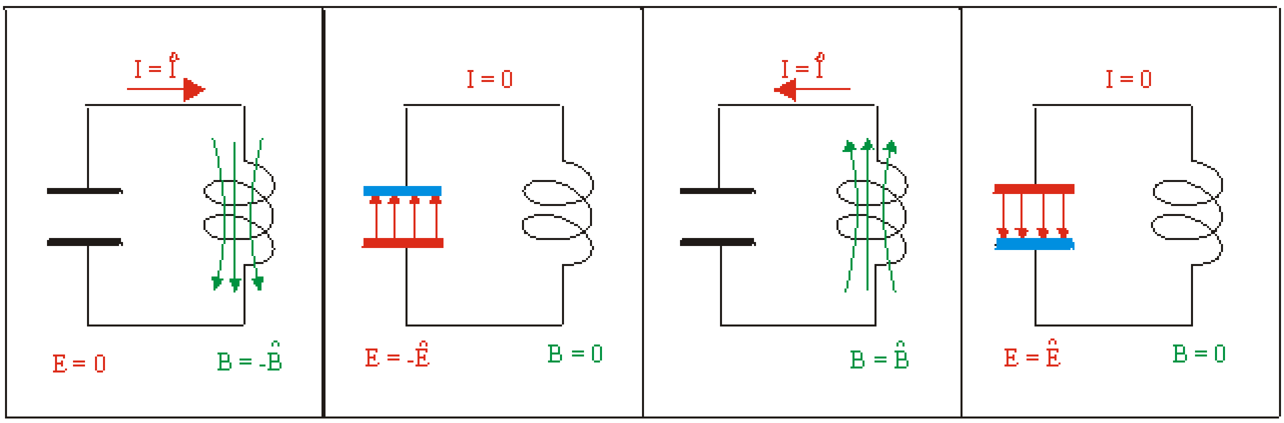
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}012}{9{,}81}}\, s = 0{,}22\, s$$

2.

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{T^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot L} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{0{,}22^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot 70} F \approx 18\, \mu F$$

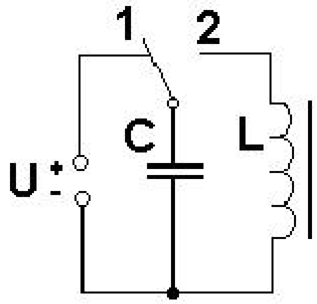
b)





2.Aufgabe:

1.Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Schaltung zur Erzeugung von elektromagnetischen Schwingungen. Es ist davon auszugehen, dass ein idealer Kondensator und eine ideale Spule über Schalter und Leitungen ohne elektrischen Widerstand verbunden sind. Die Spannungsquelle liefert eine Gleichspannung U = 10V. Weiterhin gilt C = 47µF und L = 33mH.



a) Erläutern Sie für den Zeitraum einer halben Periode die Vorgänge, die nach dem Umschalten des Schalters von Schalterstellung (1) auf (2) im Schwingkreis ablaufen. Gehen Sie dabei auch auf die Energieumwandlungen ein.

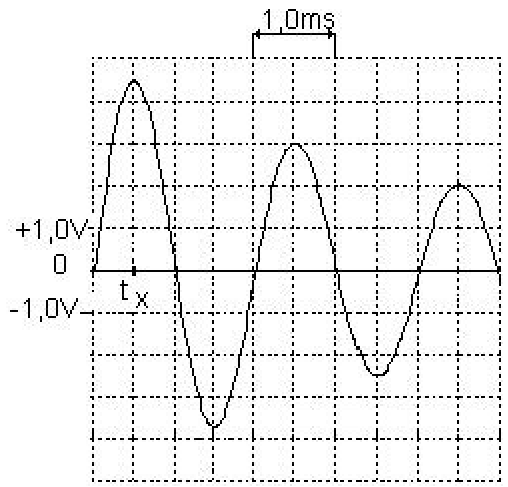
b) Geben Sie die zugehörige Schwingungsgleichung U(t) an. Bestimmen Sie dazu die in der Schwingungsgleichung auftretenden Kenngrößen. Skizzieren Sie das U(t)-Diagramm für zwei Perioden, wenn bei t = 0 die Umschaltung von Schalterstellung (1) auf (2) erfolgt.

c) Berechnen Sie die Gesamtenergie des Schwingkreises zum Zeitpunkt t = 0. Für die Gesamtenergie E des idealen Schwingkreises gilt auch

$$E(t) = \frac{1}{2} C \cdot U_0^{\;2} \cdot (\cos(\omega \cdot t))^2 + \frac{1}{2} L \cdot I_0^{\;2} \cdot (\sin(\omega \cdot t))^2 = \text{konst}$$

Zeigen Sie, wie sich diese Gleichung aus dem Energieerhaltungssatz entwickeln lässt. Untersuchen Sie auch, ob diese Gleichung Ihre Aussagen zur Energieumwandlung aus Teilaufgabe 1 a enthält.

2.Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem Oszillogramm der Spannung am Kondensator eines realen Schwingkreises. Für die n-te positive Amplitude dieser exponentiell gedämpften Schwingung gilt hier $U_n = U_0 \cdot e^{-k \cdot n \cdot T}$; n = 1,2,3,.....



a) Erläutern Sie, wie sich die Dämpfung im Oszillogramm widerspiegelt. Gehen Sie auch auf den Verlauf für t >>T ein.

b) Im Experiment beträgt zum Zeitpunkt t = 0 die Anfangsamplitude U_0 = 10,0V. Bestimmen Sie mit Hilfe des nebenstehenden Diagramms einen Näherungswert für den Abklingkoeffizienten k. Ermitteln Sie die Anzahl der Schwingungen, die zum Zeitpunkt t_x bereits abgelaufen sind.

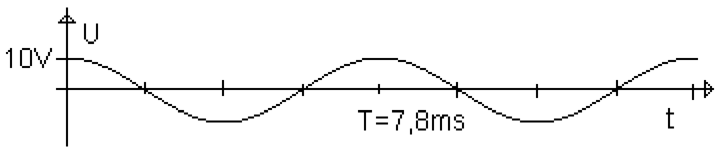
Lösung

a)Zu Beginn ist der Kondensator C geladen und es liegt an ihm die ganze Spannung von 10V und es ist zwischen den Kondensatorplatten ein elektrisches Feld auf gebaut, das die gesamte gespeicherte Energie E = $0{,}5 \cdot C \cdot U^2$ enthält. Nun entlädt sich der Kondensator über die Spule, die Spannung am Kondensator sinkt, der Spulenstrom steigt, bis nach einer viertel Periode der Kondensator völlig entladen ist und maximaler Strom durch die Spule fließt. In der Spule hat sich dadurch ein magnetisches Feld aufgebaut, das nun die gesamte Energie E = $0{,}5 \cdot L \cdot I^2$ enthält. Das Magnetfeld der Spule baut sich nun ab, wobei die dabei entstehende Induktionsspannung den Strom weiter durch die Spule treibt, bis der Kondensator nach der halben Schwingungsdauer wieder entgegengesetzt zur Ausgangslage aufgeladen ist und die gesamte Energie im elektrischen Feld steckt.

b) Schwingungsgleichung: $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$, dabei ist $U_0 = 10V$ und w ergibt sich aus der Thomsonschen Formel:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{33 \cdot 10^{-3}\mathrm{H} \cdot 47 \cdot 10^{-6}\mathrm{F}}} = 800\frac{1}{\mathrm{s}}$$

U(t) = 10V·cos(800Hz·t). Die Frequenz ist f = 800Hz : (2π) = 130 Hz



$$E(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^{\,2} \Rightarrow E(0) = \frac{1}{2} \cdot 47 \cdot 10^{-6}\mathrm{F} \cdot (10\mathrm{V})^2 \qquad = 2{,}3\ \mathrm{mJ}$$

Zu jedem Zeitpunkt ist die Gesamtenergie gleich die Summe aus der elektrischen Feldenergie des Kondensators und der magnetischen Feldenergie der Spule. $E_{ges} = E_{el} + E_{mag}$ =>

$$E(t) = \frac{1}{2}C \cdot U(t)^2 + \frac{1}{2}L \cdot I(t)^2 .$$

Um zu zeigen, dass der Strom eine Sinusfunktion ist, wenn die Spannung eine Cosinusfunktion ist, geht man am besten über die Ladung: $U(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} \cdot Q_0 \cdot \cos(\omega t)$ und

$$I(t) = \dot{Q}(t) = -\omega \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega t),$$

woraus sich bereits die gesuchte Funktion ergibt:

$$E(t) = \frac{1}{2}C \cdot U_0^{\,2} \cdot (\cos(\omega \cdot t))^2 + \frac{1}{2}L \cdot I_0^{\,2} \cdot (\sin(\omega \cdot t))^2$$

Noch zu zeigen ist, dass E(t) konstant ist. Hierzu drückt man U und I wieder durch Q aus.

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q_0^{\,2} \cdot [\cos(\omega t)]^2 + \frac{1}{2}L \cdot \omega^2 \cdot Q_0^{\,2} \cdot [\sin(\omega t)]^2$$

und ersetzt ω mittels der Thomsonformel

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q_0^{\,2} \cdot [\cos(\omega t)]^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{C} \cdot Q_0^{\,2} \cdot [\sin(\omega t)]^2$$ =>

$$E(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q_0^{\,2} \cdot \{[\cos(\omega t)]^2 + [\sin(\omega t)]^2\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q_0^{\,2}$$ = konst, da $\sin^2 + \cos^2 = 1$ (Pythagoras). Dies ist wie man sieht auch die Energie aus Teilaufgabe 1a.

2a) Die Dämpfung wird im Oszillogramm dadurch dargestellt, dass die Amplitude der Schwingung mit der Zeit abnimmt, während die Frequenz sich nicht ändert. Die Amplitude wird pro Schwingungsdauer immer um den selben Prozentsatz kleiner und verschwindet damit praktisch nach endlicher Zeit.

2b) Aus dem Diagramm erkennt man, dass T = 2,0 ms und

$$U(t+T) = \frac{2}{3}U(t) \Rightarrow \frac{U(t+T)}{U(t)} = \frac{2}{3}$$ =>

$$\frac{2}{3} = \frac{e^{-k\cdot(n+1)\cdot T}}{e^{-k\cdot n\cdot T}} = e^{-k\cdot(n+1)\cdot T + k\cdot n\cdot T} = e^{-kT} \Rightarrow -kT = \ln\frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{-\ln\frac{2}{3}}{T}$$ => k = 200 1/s

$$U(t_x) = U_0 \cdot e^{-k\cdot n\cdot T} \Rightarrow -k\cdot n\cdot T = \ln\frac{U(t_x)}{U_0} \Rightarrow n = \frac{\ln\frac{U(t_x)}{U_0}}{-k\cdot T}$$ => $$n = \frac{\ln\frac{4{,}5\,V}{10\,V}}{-200\frac{1}{s}\cdot 0{,}002\,s} = 2{,}0$$

3.Aufgabe: Analogie zwischen mechanischer und elektromagnetischer Schwingung

Die harmonische Schwingung eines Federpendels mit der Masse m und der Federkonstante D ist ein mechanisches Analogon zur ungedämpften Schwingung eines elektromagnetischen Schwingkreises. Dabei wird die (momentane) Auslenkung x des Federpendels als die zur (momentanen) Ladung Q des Kondensators analoge Größe betrachtet.
a)Begründen Sie, dass dann der (momentanen) Geschwindigkeit des Federpendels die (momentane) Stromstärke I im Schwingkreis entspricht.
b) Welche Formen elektromagnetischer Energie entsprechen im Rahmen dieser Analogiebetrachtung der kinetischen Energie bzw. der potentiellen Energie des Federpendels? Geben Sie eine kurze Begründung an.
c) Charakterisieren Sie die Phasen der elektromagnetischen Schwingung, die den Phasen maximaler Auslenkung bzw. maximaler Geschwindigkeit des Federpendels entsprechen.

d) Q_{max} sei die maximale Ladung des Kondensators, I_{max} sei der Scheitelwert der Stromstärke in der Spule des Schwingkreises.

Erläutern Sie, warum folgende Gleichung gilt $\frac{1}{2}L\cdot I_{max}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{C}\cdot Q_{max}^2$

U_{max} sei der Scheitelwert der Spannung am Kondensator des Schwingkreises.
e) Entwickeln Sie (unter Verwendung der bei Teilaufgabe d angegebenen Gleichung) die Beziehung, $I_{max} = 2\pi\cdot f_0\cdot C\cdot U_{max}$, wenn f_o die Eigenfrequenz des Schwingkreises bezeichnet.
In einem ungedämpft mit der Frequenz f_o = 2,0 Hz schwingenden Schwingkreis S beobachtet man die Scheitelwerte U_{max} = 15 V und I_{max} = 7,5 mA.
f) Berechnen Sie Kapazität C und Induktivität L des Schwingkreises.
Mit dem oben genannten Schwingkreis S wird ein Schwingkreis S' mit gleicher Kapazität C´ = C und einer zwischen 4·L und L veränderlichen Induktivität L´ zu erzwungenen Schwingungen angeregt.

g) Beschreiben Sie qualitativ, wie sich die Frequenz bzw. die Amplitude der erzwungenen Schwingung des Schwingkreises S´ verhält, wenn L´ allmählich von 4·L auf L verringert wird.

Lösung

a) Wenn der Auslenkung x die Ladung Q entspricht, so ist die Ableitung der momentanen Auslenkung die analoge Größe zur Ableitung der Ladung.
Da gilt:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{und} \quad \frac{dQ}{dt} = I$$

Also sind die Geschwindigkeit und der Strom die einander entsprechenden Größen.
b) Für die potenzielle Energie der Feder gilt:

$$E_{spann} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$$

Die entsprechende Größe im Schwingkreis ist die elektrische Energie des Kondensators:

$$E_{el} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot Q^2$$

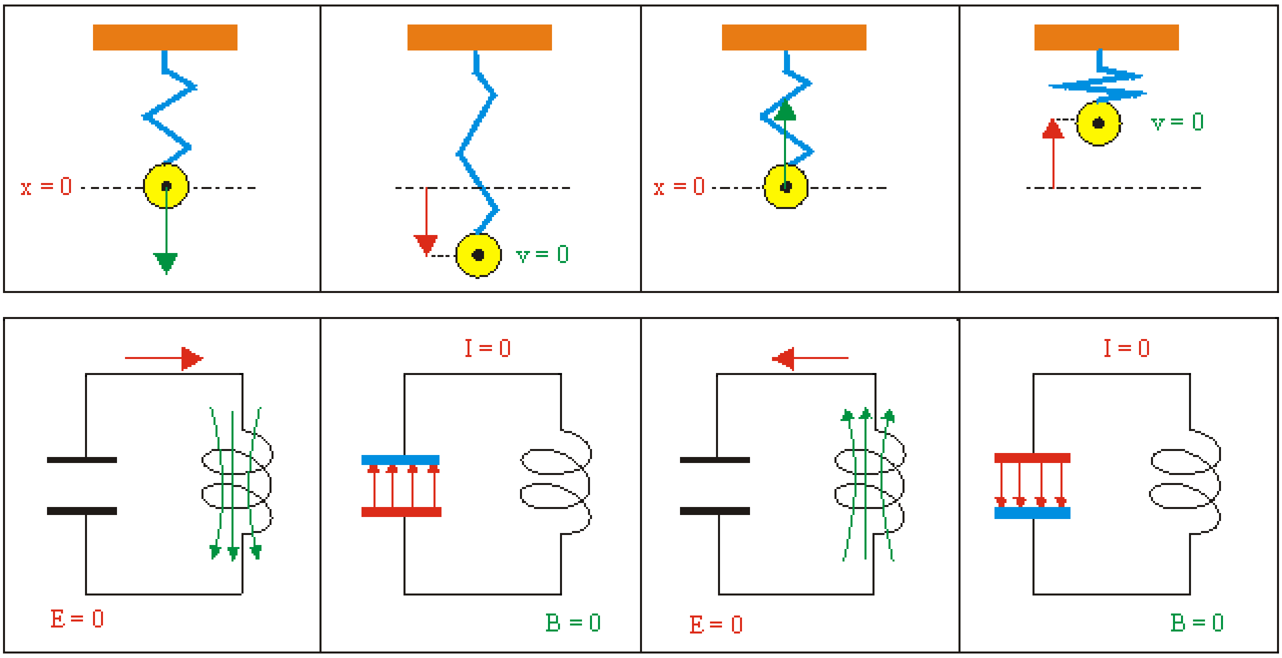
Für die kinetische Energie des Schwingers gilt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Die entsprechende Größe im Schwingkreis ist die magnetische Energie der Spule:

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

c)



maximale kinetische Energie
maximales Magnetfeld

maximale potenzielle Energie
maximales elektrisches Feld

maximale kinetische Energie
maximales Magnetfeld

maximale potenzielle Energie
maximales elektrisches Feld

d)

Diese Gleichung drückt aus, dass im Schwingkreis die Energie erhalten bleibt: Die maximale magnetische Energie der Spule $\frac{1}{2}L \cdot I_{max}^2$ (z.B. erste Spalte bei Teilaufgabe c) ist gleich der maximalen elektrischen Energie des Kondensators $\frac{1}{2}\frac{1}{C}\cdot Q_{max}^2$, die zu einem späteren Zeitpunkt erreicht wird (z.B. zweite Spalte bei Teilaufgabe c).

e) Mit dem Ergebnis von Teilaufgabe d) folgt:

$$\frac{1}{2}L\cdot I_{max}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{C}\cdot Q_{max}^2 \quad\Rightarrow\quad I_{max}^2 = \frac{1}{L\cdot C}\cdot Q_{max}^2 \quad\Rightarrow\quad I_{max} = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C}}\cdot Q_{max}$$

$$\text{da } Q_{max} = C\cdot U_{max} \text{ ist, folgt:}\quad I_{max} = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C}}\cdot C\cdot U_{max} \quad (1)$$

$$\text{mit der Thomson-Formel } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C}} \text{ bzw. } 2\pi\cdot f_0 = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C}} \text{ folgt aus (1):}$$

$$I_{max} = 2\pi\cdot f_0\cdot C\cdot U_{max}$$

f) Mit dem Ergebnis von Teilaufgabe e) folgt:

$$C = \frac{I_{max}}{2\pi\cdot f_0\cdot U_{max}} \quad\Rightarrow\quad C = \frac{7{,}5\cdot 10^{-3}}{2\pi\cdot 2{,}0\cdot 15}F = 4{,}0\cdot 10^{-5}\,F$$

Mit der Thomson-Formel folgt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C}} \text{ bzw. } 2\pi\cdot f_0 = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C}} \quad\Rightarrow\quad 4\cdot\pi^2\cdot f_0^2 = \frac{1}{L\cdot C}$$

$$\Rightarrow\quad L = \frac{1}{4\cdot\pi^2\cdot f_0^2\cdot C} \Rightarrow\quad L = \frac{1}{4\cdot\pi^2\cdot 4{,}0\cdot 4{,}0\cdot 10^{-5}}H = 1{,}6\cdot 10^2\,H$$

g)
(1) Die Frequenz des Schwingkreises S´ ist stets gleich der des Schwingkreises S (also f_0), da es sich um eine erzwungene Schwingung handelt.
(2) Die Amplitude der erzwungenen Schwingung wird umso größer, je mehr sich der Wert von L´ an den Wert von L annähert.

4.Aufgabe: Gedämpfter Schwingkreis

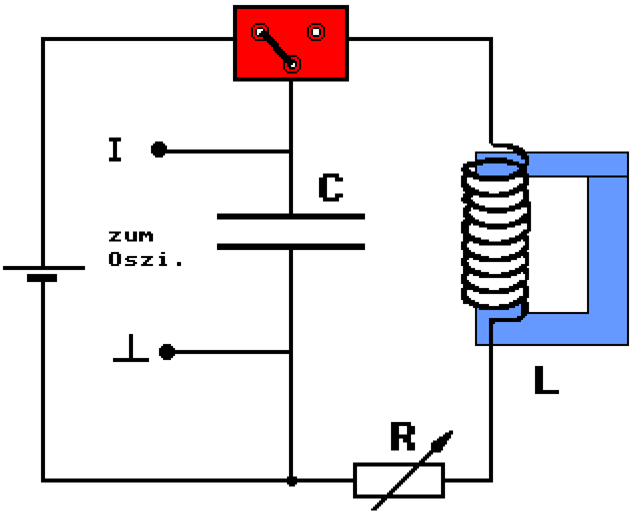
Bei der Entladung eines Kondensators über eine Spule und einen in Reihe geschalteten Widerstand entsteht eine gedämpfte elektromagnetische Schwingung. R sei so klein, dass eine schwache Dämpfung vorliegt.

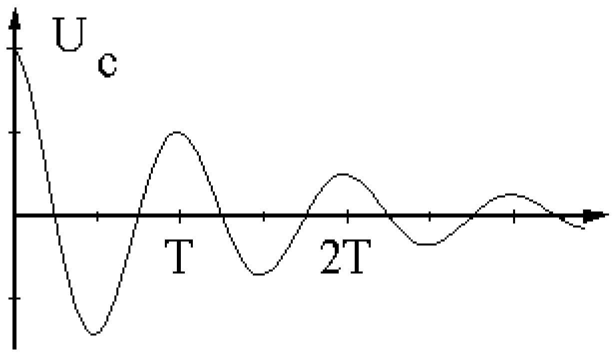
a Skizzieren Sie eine möglichst einfache Schaltung zur Darstellung des Spannungsverlaufs am Kondensator mit einem Schreiber oder Oszilloskop. Skizzieren Sie das resultierende Zeit-Spannungs-Diagramm, und beschreiben Sie qualitativ, wie sich eine Veränderung der Bauteile des Schwingkreises jeweils auf das Diagramm auswirkt.
b) Der gedämpfte Schwingkreis von Teilaufgabe a soll durch Rückkopplung zu einer ungedämpften elektromagnetischen Schwingung angeregt werden. Fertigen Sie eine beschriftete Skizze einer geeigneten Schaltung an.

In einem idealen ungedämpften Schwingkreis mit der Eigenfrequenz f = 7,5 kHz hat die Spule die Induktivität L = 0,45 mH. Durch eine zusätzliche Kapazität C* soll nun die Eigenfrequenz halbiert werden.
c) Wie lässt sich das bewerkstelligen, und wie hängt C* von der ursprünglichen Kapazität C ab? Berechnen Sie C* in Farad.

Lösung

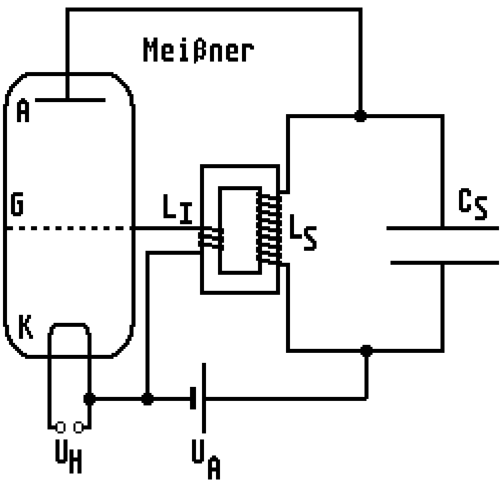
a)





(1) Vergrößerung von C bzw. L: Erhöhung der Schwingungsdauer
(2)Vergrößerung von R: Erhöhung der Dämpfung

b)



c) Wenn die Eigenfrequenz halbiert werden soll, so muss wegen der Thomson-Formel die Kapazität vervierfacht werden.

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Dies kann durch Parallelschaltung eines Kondensators mit der Kapazität C* = 3 · C erreicht werden.

Berechnung der ursprünglichen Kapazität:

$$C = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2} \Rightarrow C = \frac{1}{0{,}45 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(7{,}5 \cdot 10^3\right)^2} F = 1{,}0\mu F \quad \Rightarrow \quad C^* = 3{,}0\mu F$$

5.Aufgabe: Ungedämpfter Schwingkreis

Ein Kondensator mit der Kapazität C und eine Spule mit der Induktivität L bilden einen elektromagnetischen Schwingkreis, der ungedämpft mit der Eigenfrequenz f_0 schwingt. Die Kapazität des Kondensators beträgt C = 22 nF. Bei der Spule handelt es sich um eine lang gestreckte Spule mit der Querschnittsfläche A = 31 cm², der Länge = 30 cm und der Windungszahl N = 20000.
a)Berechnen Sie die Induktivität der Spule.
b) Untersuchen Sie, ob sich mit den gegebenen Bauteilen ein Schwingkreis aufbauen lässt, dessen Eigenfrequenz höchstens um 10 % von 500 Hz abweichen soll.
c) Berechnen Sie den Maximalwert I_m der Stromstärke in diesem Schwingkreis, wenn der Maximalwert der Spannung U_m = 3,8 V beträgt.

Lösung

a)

$$L = \mu_0 \cdot N^2 \cdot \frac{A}{l} \quad \Rightarrow \quad L = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 20000^2 \cdot \frac{31 \cdot 10^{-4}}{0{,}30} \frac{Vs}{Am} \frac{m^2}{m} = 5{,}2\,H$$

b)

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{5{,}2 \cdot 22 \cdot 10^{-9}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{Vs}{A} \cdot \frac{As}{V}}} = 4{,}7 \cdot 10^2\,Hz$$

Diese Frequenz liegt im Toleranzbereich!

c)

$$E_{mag,m} = E_{el,m} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_m^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_m^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_m = U_m \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \Rightarrow \quad I_m = 3{,}8 \cdot \sqrt{\frac{22 \cdot 10^{-9}}{5{,}2}} V \cdot \sqrt{\frac{\frac{As}{V}}{\frac{Vs}{A}}} = 0{,}25 \cdot 10^{-3}\,A$$

6.Aufgabe: Strom und Spannung im ungedämpften Schwingkreis

Ein idealer Schwingkreis, der aus der Kapazität C = 44pF und der Induktivität L = 3,0µH besteht, schwingt ungedämpft. Zum Zeitpunkt t = 0 ist der Kondensator vollständig aufgeladen, die Spannung beträgt dann 12 V.

a)Berechnen Sie die Schwingungsdauer T.
b)Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem der Kondensator nach t = 0 erstmals vollständig entladen ist. Bestimmen Sie die Stromstärke I zu diesem Zeitpunkt
c) Zeichnen Sie mit Hilfe der Teilaufgaben 1a und 1b den zeitlichen Verlauf der Spannung und der Stromstärke innerhalb einer Schwingungsdauer.
d) Erläutern Sie allgemein das Prinzip von Schaltungen, die es ermöglichen, einen realen Schwingkreis zu ungedämpften Schwingungen anzuregen.

Lösung

a) [zur Kontrolle: $T = 7{,}2 \cdot 10^{-8}$s]
b) [zur Kontrolle: I = 46mA]

7.Aufgabe: Elektromagnetischer Schwingkreis

Im idealen elektromagnetischen Schwingkreis haben die Spule und alle leitenden Verbindungen keinen ohmschen Widerstand.
a) Leiten Sie für die Ladung Q(t) auf dem Kondensator die Differentialgleichung

$$L \cdot \ddot{Q}(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = 0$$

der ungedämpften Schwingung her.
b) Leiten Sie her, welcher Zusammenhang zwischen den Größen L, C und ω bestehen muss, damit Q(t) = Q0 cos (ω t) eine Lösung der Differentialgleichung ist.
Stellen Sie mit dieser Lösung die elektrische und die magnetische Energie jeweils als Funktion der Zeit dar und überprüfen Sie die Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes.
c) Aus einem Kondensator der Kapazität 60µF und einer Spule der Induktivität 250mH wird ein Schwingkreis gebaut, dessen Schwingungen als ungedämpft betrachtet werden sollen. Am Anfang liegt die maximale Spannung 90V am Kondensator.
Nach welcher Zeit ist die Kondensatorspannung zum ersten Mal auf 30V gesunken? Wie groß ist dann die Stromstärke im Schwingkreis?

Lösung

a)Nach der kirchhoffschen Maschenregel ist die Summe der Spannungen im Kreis Null:

$$0 = U_L(t) + U_C(t) \quad \Rightarrow \quad 0 = L \cdot \dot{I}(t) + \frac{Q(t)}{C} \quad \Rightarrow \quad 0 = L \cdot \ddot{Q}(t) + \frac{1}{C} \cdot Q(t)$$

b) $$\text{Aus } Q(t) = Q_0 \cdot \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q}(t) = -Q_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos\omega t$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke in die obige Differentialgleichung ein, so ergibt sich:

$$0 = -L \cdot Q_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos\omega t + \frac{1}{C} Q_0 \cdot \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad 0 = Q_0 \cdot \cos\omega t \cdot \left(-L\omega^2 + \frac{1}{C} \right)$$

Die linke Seite der Gleichung ist Null. Damit die rechte Seite der Gleichung auch dauerhaft Null ist, muss gelten:

$$0 = -L\omega^2 + \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{1}{L \cdot C}$$

Für die magnetische Energie der Spule und der elektrischen Energie des Kondensators gilt:

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I(t)^2 \quad \Rightarrow \quad E_{mag} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \left(\dot{Q}(t)\right)^2 \quad \Rightarrow \quad E_{mag} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot Q_o^2 \cdot \omega^2 \cdot (\sin \omega t)^2$$

$$E_{elekt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q(t)^2}{C} \quad \Rightarrow \quad E_{elekt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} Q_o^2 \cdot (\cos\omega t)^2$$

Für die Gesamtenergie kann man dann schreiben:

$$E_{ges} = E_{elek} + E_{mag} \quad \Rightarrow \quad E_{ges} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} Q_o^2 \cdot (\cos\omega t)^2 + \frac{1}{2} \cdot L \cdot Q_o^2 \cdot \omega^2 \cdot (\sin\omega t)^2$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} Q_o^2 \cdot (\cos\omega t)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{L \cdot C} \cdot Q_o^2 \cdot (\sin\omega t)^2 \quad \Rightarrow$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} Q_o^2 \cdot \left[(\cos\omega t)^2 + (\sin\omega t)^2\right] \quad \Rightarrow \quad E_{ges} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} Q_o^2 = \text{konstant}$$

c) Für die Kreisfrequenz w gilt:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{250 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 10^{-6}}}\frac{1}{s} = 258\frac{1}{s}$$

Für die Zeit, bis die Kondensatorspannung auf 30V abfällt, gilt.

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \frac{Q_o}{C} \cdot \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad U(t) = U_o \cdot \cos\omega t$$

$$30\,V = 90\,V \cdot \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \cos\omega t = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \omega t = 1{,}23 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1{,}23}{258}s = 4{,}8\,ms$$

Berechnung des Stroms:

$$|I(t)| = |\dot{Q}(t)| = |-Q_o \cdot \omega \cdot \sin\omega t| = |-C \cdot U_o \cdot \omega \cdot \sin\omega t| \quad \Rightarrow \quad |I(t)| = 60 \cdot 10^{-6} \cdot 90 \cdot 258 \cdot \sin 1{,}23\,A$$

$$|I(t)| = 60 \cdot 10^{-6} \cdot 90 \cdot 258 \cdot 0{,}94\,A = 1{,}3\,A$$

9.Aufgabe: Elektromagnetischer Schwingkreis

Ein elektromagnetischer Schwingkreis enthält einen Kondensator der Kapazität 40 μF und eine Spule der Induktivität 500 H. Die abgebildeten Diagramme zeigen jeweils den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung U, der Stromstärke I in der Spule und der gesamten Schwingungsenergie E dieses gedämpften Schwingkreises.

a)Wodurch wird die Schwingung eines elektromagnetischen Schwingkreises gedämpft?

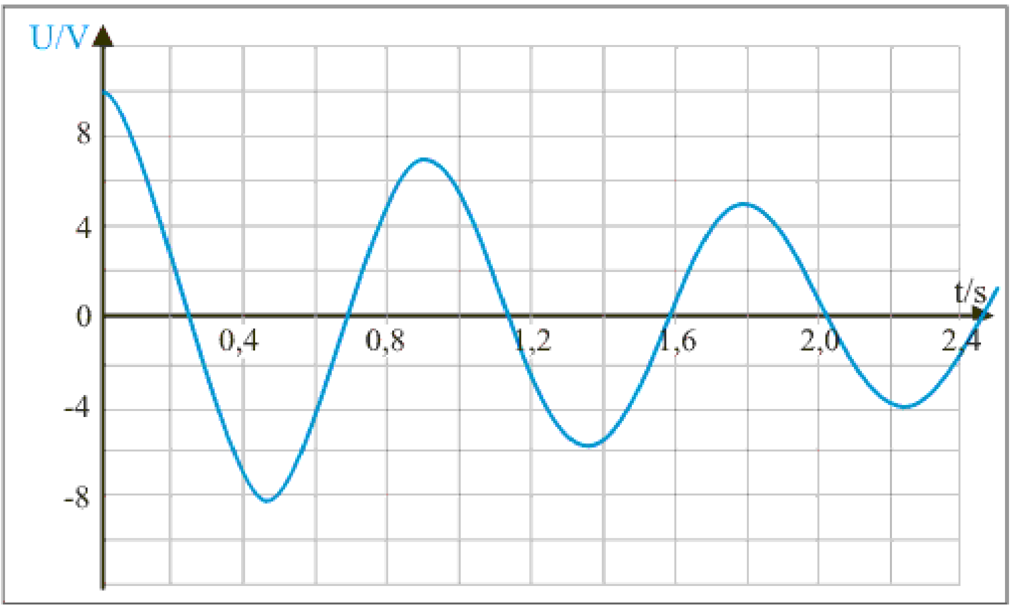
b) Lesen Sie aus einem der Diagramme die Periodendauer der gedämpften Schwingung ab. Zeigen Sie, dass diese Periodendauer in guter Näherung übereinstimmt mit der Periodendauer eines ungedämpften Schwingkreises mit den angegebenen Werten für Induktivität und Kapazität.

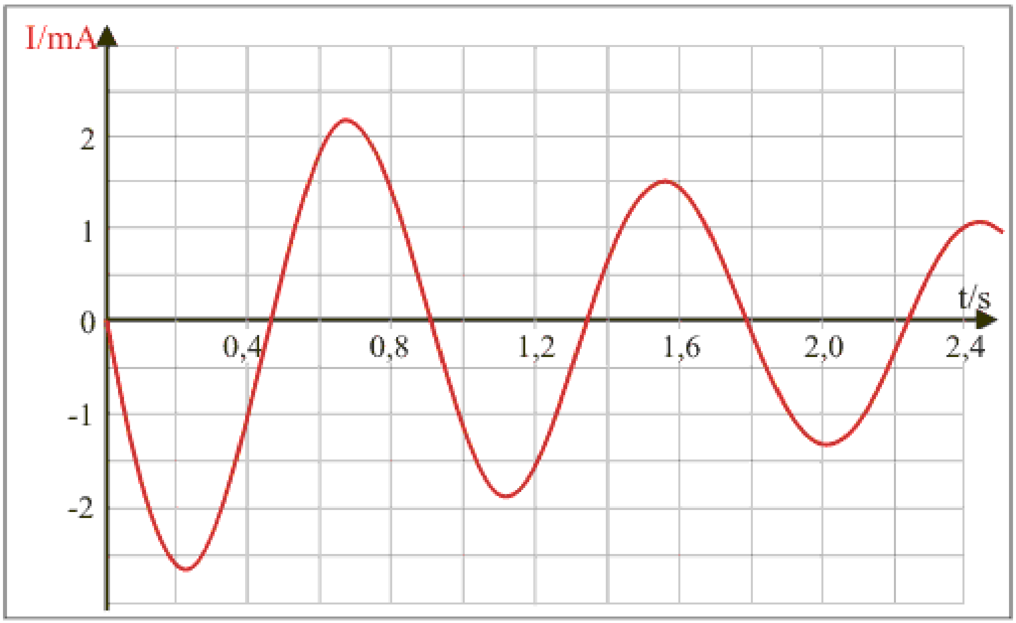
c) Begründen Sie, dass die Energieachse des t-E-Diagramms an der mit dem Pfeil markierten Stelle mit dem Wert 1,0 mJ beschriftet werden muss.

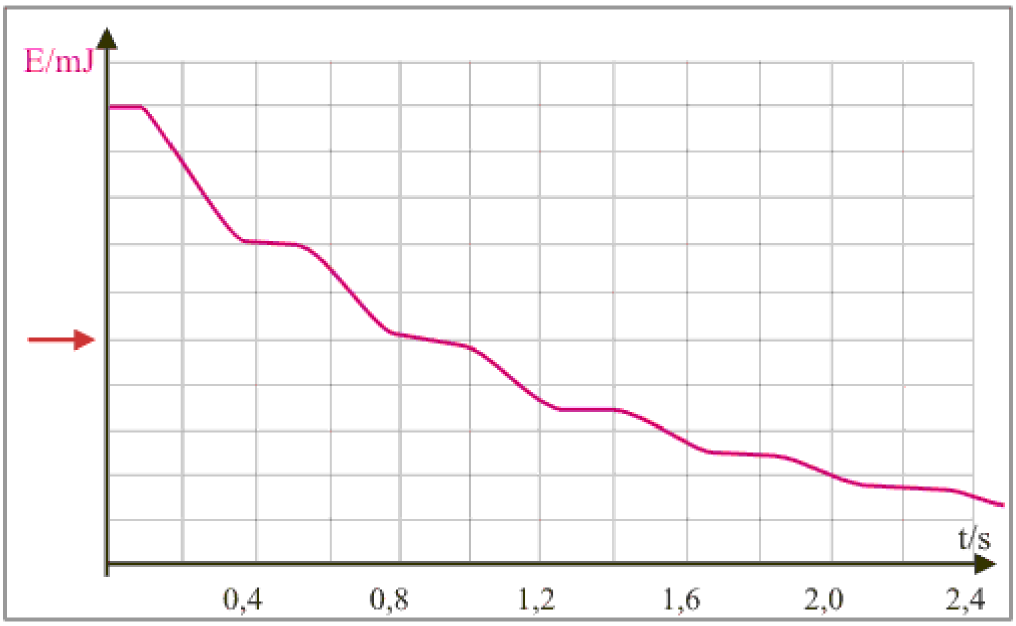
d) Lesen Sie aus dem t-E-Diagramm ab, um wie viel die Schwingungsenergie im Zeitintervall [0,45 s; 0,90 s] abnimmt. Berechnen Sie mit diesem Ergebnis und dem Effektivwert der Stromstärke näherungsweise den ohmschen Widerstand des Schwingkreises. Verwenden Sie dabei, dass die Stromstärke in guter Näherung sinusförmig verläuft.

e) Abgesehen von einer gewissen Welligkeit nimmt die Schwingungsenergie exponentiell ab. Entnehmen Sie dem t-E-Diagramm die "Halbwertszeit" für die Schwingungsenergie und berechnen Sie damit, nach welcher Zeit der Schwingkreis 99 % seiner anfänglichen Schwingungsenergie verloren hat.

f) Durch Rückkopplung kann ein Schwingkreis zu ungedämpften Schwingungen angeregt werden. Fertigen Sie eine saubere, beschriftete Skizze einer dazu geeigneten Schaltung an.


U/V
8
4
0
-4
-8
t/s
0,4
0,8
1,2
1,6
2,0
2,4

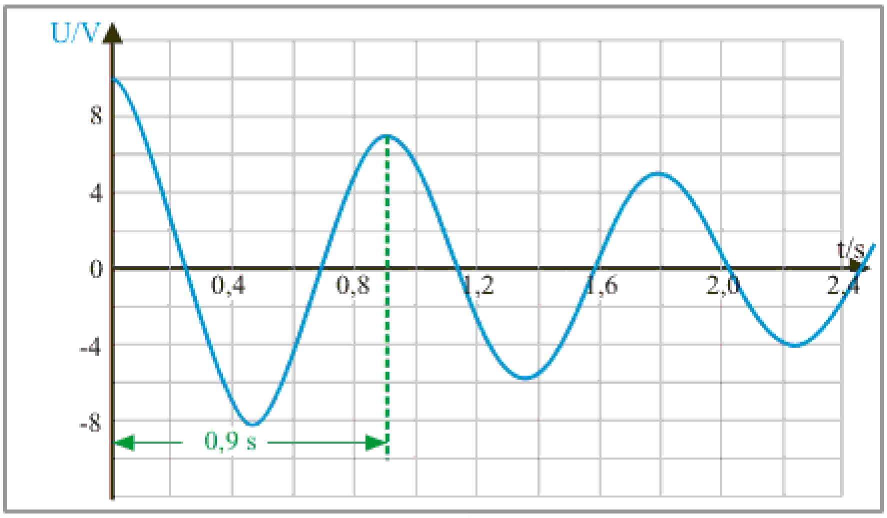

I/mA
2
1
0
-1
-2
t/s
0,4
0,8
1,2
1,6
2,0
2,4


E/mJ
t/s
0,4
0,8
1,2
1,6
2,0
2,4

Lösung

a)
(1)Die Wärmeentwicklung am ohmschen Widerstand der Spule ist wohl der Hauptgrund für die Dämpfung des Schwingkreises.
(2)Bei hohen Frequenzen kann der Schwingkreis elektromagnetische Energie abstrahlen. Auch dadurch kann es zur Dämpfung kommen (Strahlungsdämpfung).

b) Aus dem Diagramm (z.B. aus dem t-U-Diagramm) ergibt sich eine Periodendauer von ca. 0,9 s.



Berechnung der Schwingungsdauer nach der Thomson-Formel:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{500 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \sqrt{\frac{V \cdot s}{A} \cdot \frac{A \cdot s}{V}}$$

$$T \approx 0{,}89\,s$$

Gute Übereinstimmung!

c) Es ist die Energie bei T= 0,9 s zu berechnen. Zu diesem Zeitpunkt steckt die gesamte elektromagnetische Energie des Schwingkreises im Kondensator (Strom I = 0 => E_{mag} = 0)

$$E(0{,}9s) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 \xrightarrow{U(0{,}9s)=7V} E(0{,}9s) = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 10^{-6} \cdot 7^2\,J \approx 1\,mJ$$

d) Aus dem Diagramm ersieht man:

$$\Delta E = 0{,}4\text{ mJ}$$

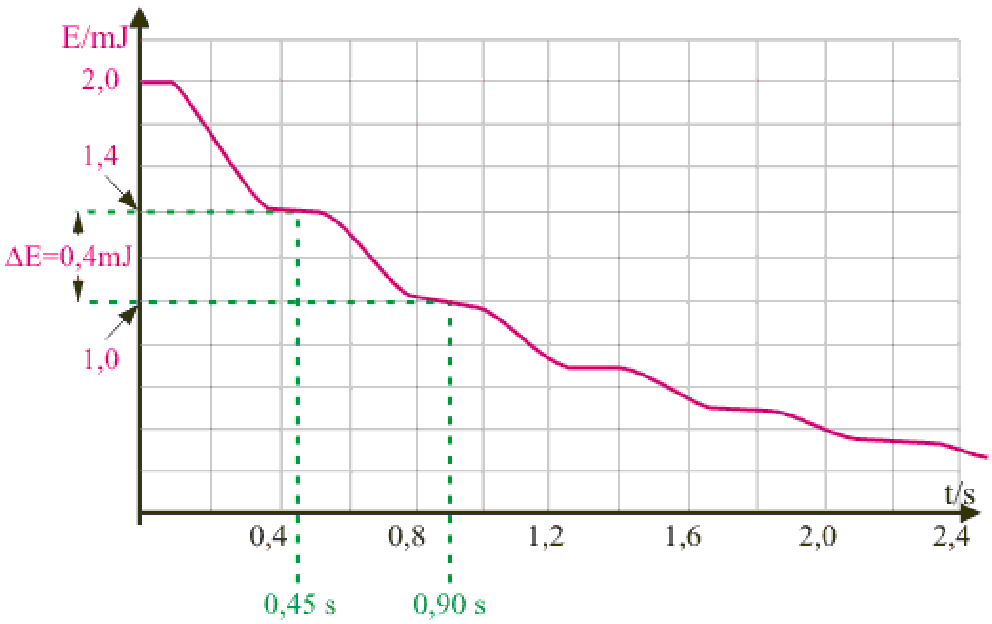
Für die Wärmeleistung gilt:

$$P_{wärme} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \Rightarrow I_{eff}^2 \cdot R = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Somit ergibt sich für den Widerstand:

$$R = \frac{\Delta E}{I_{eff}^2 \cdot \Delta t} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\Delta E}{\left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \Delta t}$$

$$R = \frac{0{,}4 \cdot 10^{-3}}{\left(\frac{2{,}2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 0{,}45}\,\Omega \approx 0{,}4\,k\Omega$$



e) Aus dem Diagramm von Teilaufgabe d) entnimmt man, dass für die "Halbwertszeit" der Energie gilt:

$$T_{1/2} = 0{,}9\,s$$

Liegt ein Exponentialgesetz für die Energie vor, so muss gelten:

$$E(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot E_0$$

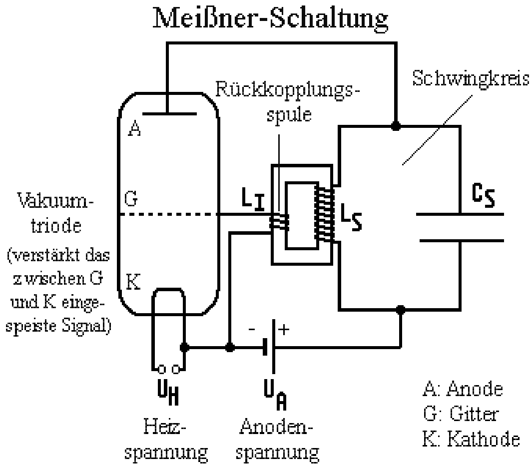
E_0: Energie zu Beginn der Schwingung; x: Zahl der Halbwertszeiten

$$E(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot E_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{E(x)}{E_0} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1\%}{100\%}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \ln 0{,}5 = \ln 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}5} \approx 6{,}6$$

Nach der Zeit $t = T_{1/2} \cdot x$ => $t = 0{,}9 \cdot 6{,}6\,s \approx 6\,s$ hat der Schwingkreis 99% seiner anfänglichen Energie verloren.

f)


Meißner-Schaltung
Rückkopplungs-
spule
Schwingkreis
A
G
K
Vakuum-
triode
(verstärkt das
zwischen G
und K einge-
speiste Signal)
L_I
L_S
C_S
- +
U_H
U_A
Heiz-
spannung
Anoden-
spannung
A: Anode
G: Gitter
K: Kathode